



钱学森

# 目 录

## 第一讲 表面波

基本方程式 .....	1
平面波 .....	4
在深水中驻波 .....	5
进行波 .....	7

## 第二讲 表面波 (续)

另一研究行波的方法 .....	9
群速度 .....	10
在有限深度液体中的波 .....	11
在空气与水交界面上的波 .....	13
风力生波的问题 .....	16

## 第三讲 波阻

波的能量 .....	17
能量的转移 .....	18
波阻 .....	19
在自由面下的旋 .....	19

## 第四讲 水面滑行的平板

作用在自由面上的力 $F$ .....	26
以仰角 $\alpha$ 运行的平板 .....	28
船舶造波阻力的计算 .....	32

## 第五讲 浅水中的长波

基本方程式 .....	33
写成气动力学形式 .....	35



高速气流的水流模型 .....	37
特征线解法 .....	38
水跃 .....	40

## 第六讲 河流水动力学

河道和明渠中的流动 .....	44
定常流、合流问题 .....	47
洪峰、不定常流 .....	50
特征线法 .....	52

## 第七讲 空化

空泡、空蚀现象 .....	54
局部的空蚀 .....	55
完全的空泡情况 .....	56
完全空泡中的平板 (任意攻角) .....	58
正迎水流的平板 .....	61
正迎水的平板 (另一推演) .....	65

## 第八讲 非线性自由面及交界面问题

基本方程式 .....	68
自由面问题 .....	69
一种转换 .....	71
异重流 .....	75
水库的异重流问题 .....	78

## 第九讲 泥沙问题

渠道中泥沙的输移 .....	84
悬沙浓度的分布 .....	85
浅水情况下的沙涟波长 .....	89

注释与说明 .....	92
-------------	----

## 第一讲 表面波

第一讲

基本方程式

我們來研究无粘性液体在外压的短时间作用下的结果:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad X = \text{单位质量液体力}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

如果压力作用的时间为  $\tau$ , 而在此  $t=0$  的时候  $v_x = v_y = v_z = 0$ ,

$$v_x + \int_0^\tau \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dt = \int_0^\tau X dt - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\tau p dt$$

但  $\tau \ll 1$ ,

$$v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\tau p dt$$

让

$$\pi = \int_0^\tau p dt = \pi(x, y, z) = \text{冲量}$$

$$v_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\pi}{\rho} \right), \quad v_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\pi}{\rho} \right), \quad v_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\pi}{\rho} \right)$$

所以由于压力所产生的运动是无旋的, 而且如果让

$$\pi = -\rho \phi,$$

那么在压力作用终止的瞬间, 液体速度是

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \vec{v} = \text{grad } \phi, \quad \phi = \phi(x, y, z) \text{ 的速度势}$$

因此以后的运动也是无旋的,  $\phi$  = 速度势

$$\vec{v} = \text{grad } \phi$$



因而由于液体的连续条件

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

就有

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

基本微分方程式

我们知道, 在无旋的运动中,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} v^2 - V + F(t)$$

其中  $V$  是势能。如果  $0z$  的方向是竖直向上的, 则

$$V = gz$$

而

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = -g$$

其实在我们的许多计算里, 我们的目的是分析小干扰情况, 所以  $\frac{1}{2}v^2$  可以略去不计, 而且  $F(t)$  也可以吸收到  $\varphi$  中去, 所以

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz$$

压力关系

现在我们来研究一下边界条件: 在不动面上

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

——在不动面上 —— 边界条件

我们取平衡位置时的自由面为  $Oxy$  平面, 在液体自由面上的压力是常数  $p_0$ , 因而在自由面上

$$\frac{p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz$$

为了简单起见, 我们将以  $\varphi + \frac{p_0}{\rho}t$  来代替  $\varphi$ , 那么压力关系成为

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz$$

如果在任意时间  $t$ , 自由面的方程是



$$z = \zeta(x, y, t)$$

那么因为在自由面上  $p = p_0$ , 所以压力关系

$$\left[ \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} \right]_{z=\zeta(x, y, t)} = p \zeta = 0$$

但是 
$$\left[ \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} \right]_{z=\zeta(x, y, t)} = \frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t} + \zeta \frac{\partial^2 \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t \partial z} + \dots$$

所以如果略去二次微项不计, 那么

$$\frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t} + p \zeta = 0$$

或用微分

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{p} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t^2}$$

我们来研究一下,  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  到底是什么? 我们研究在自由面上一点  $x, y$ ,  $z = \zeta(x, y, t)$  的速度,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

如果我们研究的是小干扰,  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y} \ll 1$ , 因而  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  就是  $v_z = \frac{dz}{dt}$ , 所以终于

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{p} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad z=0 \quad \text{边界条件}$$

象这样一个不定常运动, 我们除了边界条件而外, 还需要初始条件: 我们从现象的情况来看, 初始条件将在自由面上规定:

令

$$\zeta(x, y, 0) = \eta(x, y) = -\frac{1}{p} f(x, y),$$

那么

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=0, t=0} = f(x, y)$$

速度将由作用在自由面上的水起动冲量得来。我们在以前 (常常有  $\frac{1}{p}$  的差别, 但这里  $t=0$ , 故无差别)  $\varphi_0 = -\frac{1}{p} \pi$ , 所以

$$\varphi_0(x, y, 0) = -\frac{1}{g} \pi(x, y, 0) = F(x, y)$$

那么

$$\boxed{\varphi = F(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x, y)} \quad z=0, t=0$$

这是初始条件。

惟一性问题。如果  $\varphi_1, \varphi_2$  是满足一切条件的两个不同解,  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  也是一个解, 但在  $z=0, t=0$

所以从现实的情况来看, 没有干扰, 没有运动, 所以  $\varphi=0$ , 也就是  $\varphi_1 = \varphi_2$ 。

但是在很多情况下, 我们要研究的是某个一定频率  $\sigma$  的自由谐和振动, 也就是

$$\varphi(x, y, z, t) = \cos(\sigma t + \epsilon) \Phi(x, y, z)$$

那么

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \Phi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \quad \text{在不动面上,} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\sigma^2}{g} \Phi, \quad \text{在自由面 } z=0 \text{ 上} \end{aligned}}$$

自然, 二类问题, 初始问题和自由谐和振动问题是可以由叠加法而互相转变。

### 平面波

如果我们认为一切都不是  $z$  的函数, 那么

$$\varphi(x, z, t) = \cos(\sigma t + \epsilon) \Phi(x, z)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$



其边界条件为

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{在不动面}$$

在深水中的  
驻波 令

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \phi \quad \text{在 } z=0$$

$$\phi(x, z) = P(z) \sin k(x - \zeta), \quad \text{其中 } k, \zeta \text{ 是两个常数。}$$

所以微分方程为

$$P''(z) - k^2 P(z) = 0$$

$$P(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}$$

由于不能让干扰在深水里越来越大, 所以  $C_2 = 0$ 。因而我们可以

$$\phi(x, z) = C e^{kz} \sin k(x - \zeta)$$

而

$$\phi(x, z, t) = C e^{kz} \sin k(x - \zeta) \cos(\sigma t + \epsilon)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = k C e^{kz} \sin k(x - \zeta)$$

故自由面上,  $z=0$ 

$$k C \sin k(x - \zeta) = \frac{\sigma^2}{g} C \sin k(x - \zeta)$$

因而如果是无论什么点上, 上式都成立, 那么

$$\boxed{\sigma^2 = kg}$$

为了求自由面的形状, 我们用  $\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial t}$   
也就是

$$\zeta = \frac{C \sigma}{g} \sin k(x - \zeta) \sin(\sigma t + \epsilon)$$

如果  $\frac{C \sigma}{g} = a$ ,  $\zeta = \epsilon = 0$ ,而令在  $t$  时间

$$\zeta = a \sin kx \sin \sigma t$$

$$a \sin \sigma t = A$$

$$\zeta = A \sin kx$$

所以波幅是  $a \sin \sigma t$ , 波长是

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

而频率是

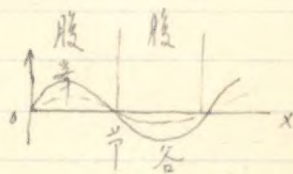
$$\boxed{1/T = \frac{\sigma}{2\pi}}$$

$$\frac{1}{T^2} = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{g T^2}{2\pi}}$$

$$\sigma^2 = \frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{2\pi}{\lambda} g$$

$$\boxed{T^2 = \frac{2\pi \lambda}{g}}$$





由此可见波长和频率或周期是有一定关系的。但与液体的密度或  $\rho_0$  无关。与  $g$  有关！

现在我们来研究液体质点的速度和轨迹：

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \cos kx \cos \omega t; \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \sin kx \cos \omega t$$

但是  $gk = \omega^2$ ,

$$v_x = a\omega e^{kz} \cos kx \cos \omega t$$

$$v_z = a\omega e^{kz} \sin kx \cos \omega t$$

所以质点轨迹，

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z}$$

或

$$\frac{\sin kx}{\cos kx} dx = dz, \quad \ln|\cos kx| + kz = \text{常数}$$

$\cos kx > 0$

$\cos kx < 0, \quad \cos kx = e^{i\pi}/|\cos kx|$

$\ln|\cos kx| + i\pi + kz = \text{常数}$

所以

$$\ln|\cos kx| + kz = C$$

我们也可以利用流函数的办法来求：

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -a\omega e^{kz} \sin kx \cos \omega t; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = a\omega e^{kz} \cos kx \cos \omega t$$

$$\therefore d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = a\omega e^{kz} a\omega \cos \omega t [-e^{kz} \sin kx dx + e^{kz} \cos kx dz]$$

$$= \frac{a\omega \cos \omega t}{k} d[e^{kz} \cos kx]$$

因而

$$\psi = \frac{a\omega \cos \omega t}{k} e^{kz} \cos kx$$

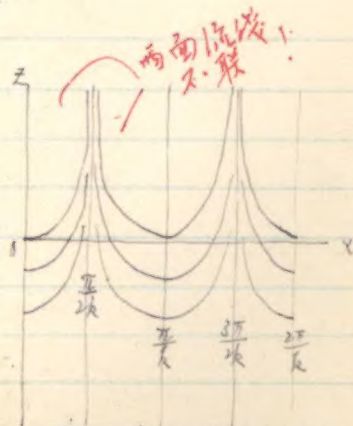
而任意一条流线的方程是

$$e^{kz} \cos kx = C'$$

此

因为流线是不可以  $z$ -向移动的。而且它们也不

这一方法有缺点，不能确定时间常数。





因时间而变动；所以它们是流体质点移动的轨迹。但质点不过沿着直线振动，而且振幅小，所以把它们看作是直线运动。如果  $x_0, z_0$  是一个质点的平衡位置，那么以小于扰的看做

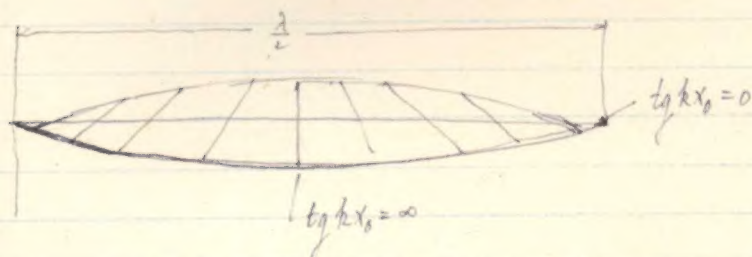
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = a \omega e^{kz_0} \cos kx_0 \cos \omega t, \quad \frac{dz}{dt} = a \omega e^{kz_0} \sin kx_0 \cos \omega t$$

$$x - x_0 = a e^{kz_0} \cos kx_0 \sin \omega t, \quad z - z_0 = a e^{kz_0} \sin kx_0 \sin \omega t$$

故

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \tan kx_0$$



$$e^{2\eta} = 535$$

进行波 我们可以选择  $\xi = \frac{\pi}{k}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\eta = C e^{kz} \sin(kx - \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = C e^{kz} \cos kx \sin \omega t$$

这个驻波和以前的

$$\eta = C e^{kz} \sin kx \cos \omega t$$

比较，无论  $x$  或  $t$  都差  $\frac{\pi}{2}$ ，如把它们两者叠加一起当然仍然是一个

解

$$\eta = C e^{kz} \{ \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t \} = C e^{kz} \sin(kx + \omega t)$$

我们来研究它的自由面

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \eta(x, z, t)}{\partial t} = -\frac{C \omega}{g} \cos(kx + \omega t)$$

就象以前一样，引入记号  $\frac{C \omega}{g} = a$ ,

$$\zeta = -a \cos(kx + \omega t), \quad \eta = \frac{a g}{\omega} e^{kz} \sin(kx + \omega t)$$

现在波幅不以时间而变了，而波长  $\lambda$  仍然是

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$



空间中任一点, 如果满足  $kx + \omega t = \text{常数}$ ,  $\omega$  即不变. 波速是

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \text{即} \quad v = \frac{\omega}{k}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = \lambda \cdot \frac{v}{\lambda} = v$$

波速因波长的不同而有所不同, 是波长的平方根.

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = 15 e^{kz} \cos(kx + \omega t)$$

$$v_z = \frac{\partial v}{\partial z} = 15 e^{kz} \sin(kx + \omega t)$$

波速在任一瞬间  $t$  是

$$\frac{v_x}{v_z} = \frac{v_x}{v_z}$$

$$\frac{v_x}{v_z} = \frac{v_x}{v_z}$$

$$\frac{v_x}{v_z} = \frac{v_x}{v_z}$$

波速

$$e^{kz} \cos(kx + \omega t) = \text{常数}$$

由此可知, 质点的运动轨迹, 不是沿  $x$  轴或  $z$  轴运动, 而是沿  $x$  轴和  $z$  轴运动. 它并不代表质点运动的轨迹! 质点运动的轨迹, 是

$$\frac{dx}{dt} = 15 e^{kz_0} \cos(kx_0 + \omega t)$$

$$\frac{dz}{dt} = 15 e^{kz_0} \sin(kx_0 + \omega t)$$

$$(x - x_0) = 15 e^{kz_0} \sin(kx_0 + \omega t)$$

$$-(z - z_0) = 15 e^{kz_0} \cos(kx_0 + \omega t)$$

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = 15^2 e^{2kz_0}$$

也就是说质点运动的轨迹是以  $x_0, z_0$  为中心的圆, 其半径为  $15 e^{kz_0}$ , 随着  $z_0$  的增加而急剧减小. 又

$$(x - x_0) + i(z - z_0) = 15 e^{kz_0} [\sin(kx_0 + \omega t) - i \cos(kx_0 + \omega t)]$$

$$= 15 e^{kz_0} [-i \sin(kx_0 + \omega t) - \cos(kx_0 + \omega t)]$$

$$= -i 15 e^{kz_0} e^{i(kx_0 + \omega t)} = -i 15 e^{k(z_0 + ix_0)} e^{i\omega t}$$

当波在传播时，沿传播方向的速度为0，所以，速度是0。因为

$$z = -a \cos(kx + \omega t)$$

当波在传播时， $kx + \omega t = (2n+1)\pi$ ，所以在波峰的地方

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega, \quad \frac{dz}{dt} = 0. \quad \text{以波的方向运动}$$

在波谷的地方， $kx + \omega t = 2n\pi$ ， $\frac{dx}{dt} = a\omega$ ， $\frac{dz}{dt} = 0$ ，以波的反方向运动。

我们再来计算一下压力，

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} - \rho g z = -\rho g e^{kz} \cos(kx + \omega t) - \rho g z$$

因为  $z - z_0$ ， $x - x_0$  都是一级小量，而  $z - z_0 = -a e^{kz_0} \cos(kx + \omega t)$ ，所以

$$p - p_0 = -\rho g e^{kz_0} \cos(kx + \omega t) - \rho g (z - z_0) - \rho g z_0 = -\rho g z_0$$

由此可见，在运动时，在平衡位置时，压力是一级小量，而在波峰或波谷时，压力是二级小量。这说明，在平衡位置时，压力是常数，而在波峰或波谷时，压力是变化的。从这可见，由  $z = z_0$  所组成的面都可以称为液体的自由面。

反向运动的波  
一切反向运动。

$$\psi = \frac{a\omega}{g} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

波长 $\lambda$ , 米	50	100	5000	500,000
速度 $c$ , 米/秒	8.83	12.50	88.3	883
周期 $T$ , 秒	5.60	8.00	56.0	560

第二讲 表面波

§2.1 运动的方程

△ 我们也可以用另一种方法来计算压力。假设在  $z = z_0$  处，压力是常数，而在波峰或波谷时，压力是变化的。从这可见，由  $z = z_0$  所组成的面都可以称为液体的自由面。

$$w = \psi + i\phi = -c(x + iz) = -c(x + iz) + iac e^{-ik(x+iz)}$$

$$= -c(x + iz) + iac e^{kz} (\cos kx + i \sin kx)$$

$$p = -cx + ac e^{kz} \sin kx, \quad v' = -cz + ac e^{kz} \cos kx$$



自由面形状为平面。自由面是  $\psi = 0$ ,  $z = 1$ ,  $v = 0$  的线。

$$z = a \cos kx$$

压力可以用 Bernoulli 方程式求

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \frac{1}{2}v^2 + C$$

$$\begin{aligned} \text{即 } v^2 &= (-C + a c k e^{kz} (\cos kx)^2 + a c k e^{kz} (\sin kx)^2) \\ &= C^2 - 2 a c^2 k e^{kz} \cos kx \end{aligned}$$

再求式  
张真  
故

$$a c e^{kz} \cos kx = \psi + cz$$

$$v^2 = C^2 - 2 c k (\psi + cz) = C^2 - 2 c k \psi - 2 k c^2 z$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= -gz + k C^2 z + k c \psi - \frac{1}{2} C^2 + C \\ &= (k C^2 - g)z + k c \psi + \text{常数} \end{aligned}$$

前线上  $\psi = 0$  上的压力  $p$  保持不变, 故  $z$  的系数一定要是零, 故

$$C^2 = \frac{g}{k} = \frac{g \lambda}{2\pi} \quad \lambda = \frac{2\pi C^2}{g}$$

叠加原理 我们把两个不同波长的波叠加起来

$$\psi = \frac{a_1}{\omega} e^{k_1 z} \sin(k_1 x - \omega_1 t) + \frac{a_2}{\omega} e^{k_2 z} \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

其中

$$\omega = \sqrt{gk}$$

在这种情况下, 自由面的形状是

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \psi}{\partial t} = a \left[ \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t) \right] \\ &= 2a \cos \left[ \frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right] \cos \left[ \frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \end{aligned}$$

因此如果  $k_1, k_2$  的差别不大, 那么也是一群一群的高频波  
包络线以低频波动, 包络线速度  $c = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{g}{2(k_1 + k_2)}$ , 高频波则

是

$$\frac{\sigma - \sigma'}{k - k'} = \frac{d\sigma}{dk} = 0$$

在这里

$$\sigma = \sqrt{gk}$$

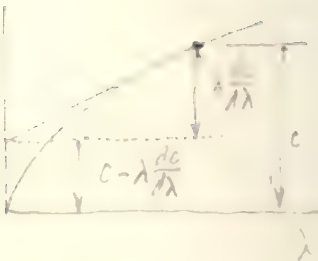
$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} = \boxed{\frac{1}{2} c = l}$$

这就是说，在重力波中，波速与波长的平方根成正比。当波长远大于水深时，重力波是深水波，其波速与波长的平方根成正比。当波长远小于水深时，重力波是浅水波，其波速与波长的平方根成正比。当波长远大于水深时，重力波是深水波，其波速与波长的平方根成正比。当波长远小于水深时，重力波是浅水波，其波速与波长的平方根成正比。

$$l = \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

故

$$l = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{d(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}})}{d(\frac{1}{\lambda})} = \frac{\frac{\lambda dc - c d\lambda}{\lambda^2}}{-\frac{d\lambda}{\lambda^2}} = \boxed{c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = l}$$

所以只有当  $d(\frac{1}{\lambda}) = 0$  时  $l = c$ 

重力波在浅水中的传播 重力波在浅水中的传播

$$\psi = \Phi(x, z) e^{i\omega t + \epsilon}$$

$$\Phi(x, z) = P(z) \sin k(x - \xi)$$

所以

$$P(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} = K_1 \cosh k(z+h) + K_2 \sinh k(z+h) = -K_1 \cosh kh$$

我们知道如果底在  $z = -h$ ，那么当  $z = -h$  时

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

$$\text{所以} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = [C_1 k \cosh k(z+h) + K_2 k \sinh k(z+h)] \sin k(x - \xi)$$



所以边界条件是边条件  $\eta=0$  处

$$\eta(x, z, t) = (ch k(z+h) \sin k(x-\xi) \cos(\sigma t + \epsilon))$$

自由面上的条件是  $\eta=0$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \eta$$

所以

$$k \sinh kh = \frac{\sigma^2}{g} \cosh kh ;$$

$$\boxed{\sigma^2 = gk \tanh kh}$$

所以

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{g \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$$

而自由面的形状是

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{(5)}{g} ch kh \sin k(x-\xi) \sin(\sigma t + \epsilon)$$

如果我们令

$$\frac{(5)}{g} ch kh = a$$

那么驻波最后的解的形式可写成

$$\boxed{\begin{aligned} \eta &= \frac{a}{ch kh} \sin k(x-\xi) \cos(\sigma t + \epsilon) \\ \zeta &= a \sin k(x-\xi) \sin(\sigma t + \epsilon) \end{aligned}}$$

那么进行这个形式是

$$\eta = \frac{a}{ch kh} \sin k(x-\xi) \cos(\sigma t + \epsilon)$$

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \sin k(x-\xi) \sin(\sigma t + \epsilon)$$

所以驻波波峰位置是

$$x = \xi + \frac{\lambda}{2} \quad \text{和} \quad x = \xi + \frac{3\lambda}{2}$$

我们注意波底的位置是  $x = \xi + \frac{\lambda}{4}$  和  $x = \xi + \frac{3\lambda}{4}$

我们注意到，波速又与  $g, \lambda, h$  等有关，与液体的密度  $\rho_0$  无关。

当  $\frac{2\pi h}{\lambda} \rightarrow 1$ ，那么

此时是浅水波，所以波速为

四、重力波

$$c^2 = \frac{g}{k}$$

重力波是液体表面重力作用引起的波动，其传播速度远小于电磁波，且其传播方向与重力方向垂直。重力波的速度与波长的平方根成正比。



也就是

$$\begin{aligned} c_h^2 &= (c+dc)(h+dh) \\ g'(c+dc)^2(h+dh) - g c^2 h &= \frac{g}{2} h^2 - \frac{g}{2} (h+dh)^2 \\ c &= c dh + h dc \\ 2chdc + c^2 dh &= -gh dh \\ chdc &= -gh dh \\ c &= -g \frac{dh}{dc} = gh \end{aligned}$$

重力波的速度与波长的平方根成正比，且其传播方向与重力方向垂直。重力波的速度与波长的平方根成正比。

$$\begin{aligned} \text{群速: } \frac{1}{c} &= \frac{dc}{dk} = \frac{d}{dk} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \left( -\frac{1}{k^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{g}{k}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{c} = -\frac{1}{2} \frac{1}{c k^2} \end{aligned}$$

当  $k \rightarrow 0$  时， $c \rightarrow \infty$ ，所以群速也趋于无穷大。

五、重力-毛细波

重力-毛细波是液体表面重力与表面张力共同作用引起的波动。其传播速度与波长的三次方根成正比。重力-毛细波的速度与波长的三次方根成正比。

$$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

重力-毛细波的速度与波长的三次方根成正比。



一、我们考虑在 \$z=0\$ 处，流体在 \$x\$ 方向上的速度分量 \$u\$ 和 \$v\$ 的连续性条件。

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 g} = - \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right|_{z=0} - g \zeta$$

$$= + C_1 \sigma \cos(kx - \sigma t) - g \zeta$$

$$\left. \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{p_2 - p_0}{\rho_2 g} = \frac{p_1 - p_0}{\rho_2 g} = C_1 \sigma \cos(kx - \sigma t) - g \zeta$$

$$= C_2 (\sigma - Uk) \cos(kx - \sigma t) - g \zeta$$

所以

$$p_1 - p_0 = C_1 \rho_1 \sigma \cos(kx - \sigma t) - \rho_1 g \zeta$$

$$p_2 - p_0 = C_2 \rho_2 (\sigma - Uk) \cos(kx - \sigma t) - \rho_2 g \zeta$$

于是  $\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = \alpha \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$

因此  $[C_1 \rho_1 \sigma - C_2 \rho_2 (\sigma - Uk)] \cos(kx - \sigma t) - (\rho_1 - \rho_2) g \zeta = \alpha \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$

我们假设 \$\zeta = a \cos(kx - \sigma t)\$

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

我们看到如果要表面张力与引力  
佔同等重要的地位，那么

$$\frac{\alpha}{\lambda^2} \sim \rho_2 g, \quad \lambda \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_2 g}}$$

如果

$$\zeta = a \cos(kx - \sigma t)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\sigma a \sin(kx - \sigma t) = -\frac{\sigma}{k} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -k a \sin(kx - \sigma t)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\sigma}{k} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -k \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

所以

$$\left[ C_1 \rho_1 \sigma - a \left( \frac{\sigma}{k} - U \right) C_2 (\sigma - Uk) \right] - (\rho_1 - \rho_2) g a = -\alpha k^2 a, \quad \text{而 } \frac{\sigma}{k} = c$$

$$+ C_1 \rho_1 + (c - Uk) C_2 + \frac{1}{k} - U \frac{1}{k} = \frac{\alpha}{a} \frac{1}{k^2} = 0$$

也就是说  $\dots = \alpha \frac{1}{k^2} = 0 \dots (C_2 + C_1) c - \frac{1}{k} = 0 \dots \left[ \frac{1}{k} + (c - U) \frac{1}{k} \right] \frac{1}{k} = \frac{\alpha}{a} \frac{1}{k^2}$

$$r^2 = \frac{H^2}{s_1 + s_2} + \frac{H^2 s_2^2}{(s_1 + s_2)^2} + \frac{s_2 - s_1}{s_1 + s_2} \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{(s_1 + s_2)^2} - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}$$

$$r^2 = \frac{H^2}{s_1 + s_2} + \frac{H^2 (s_2 - s_1)^2}{(s_1 + s_2)^3} + \frac{2\pi\alpha}{\lambda(s_1 + s_2)} - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}$$

我们看什么时候

$$r^2 < 0 < \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{s_2 - s_1}{s_2}} + \frac{2\pi\alpha}{g\lambda}$$

的时候有一个正值就是负的,也就是说波将逆方向传播。

但是更主要的是,在什么时候,也就是什么 $H$ 值,不管什么 $\alpha$ 值,都不会 $r^2 < 0$ 的复数值,我们看它

$$\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{(s_2 - s_1)}{s_2 + s_1} + \frac{2\pi\alpha}{\lambda(s_2 + s_1)}$$

的最小值。也就是

$$\frac{g}{2\pi} (s_2 - s_1) = -\frac{2\pi\alpha}{\lambda^2}$$

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{g(s_2 - s_1)}{2\pi\alpha}} \quad \lambda_m = 10 \sqrt{\frac{s_2 - s_1}{\alpha}} \approx 10 \sqrt{\frac{\alpha}{\rho^2}}$$

所以条件是

$$H^2 < \frac{(s_1 + s_2)}{2\pi} \frac{2\pi\alpha(s_2 - s_1)}{s_1 s_2} \frac{1}{\sqrt{g(s_2 - s_1)}} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \sqrt{\frac{2\pi\alpha(s_2 - s_1)}{g}}$$

也就是说

$$H < \sqrt{\frac{4\pi\alpha(s_2 - s_1)(s_1 + s_2)}{s_1 s_2^2}} = \sqrt{\frac{4\pi\alpha(s_2 - s_1)(1 + \frac{s_1}{s_2})}{s_2 (s_1/s_2)^2}}$$

我们是按计算的(用 $s_1/s_2 = 1/10$ , 和 $74$ 达因/厘米)结果是  $H = 6.46$  厘米, 这一个区间的意义是: 如果  $H > 6.46$  厘米, 那么总会存在一个波数使得 $r^2$ 是负的。(若波数 $k$ 是复数, 那么 $c = c_r + ic_i$ )

$$c = c_r + ic_i$$



即: 
$$\begin{aligned} \cos(kx - \omega t) &= \cos k(x - ct) \\ &= \cos k(x - c_0 t \mp i c_1 t) \\ &= \cos(kx - k c_0 t) \cos k c_1 t \pm \sin(kx - k c_0 t) \sin k c_1 t \\ &= \cos(kx - k c_0 t) \cos k c_1 t \approx \cos(kx - k c_0 t) \quad \text{当 } k c_1 t \ll 1 \end{aligned}$$

因此波面方程近似为: 
$$\cos k(x - c_0 t) = \cos kx - k c_0 t = \cos kx - \frac{2\pi}{\lambda} c_0 t = \cos kx - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{c_0}{c} t$$

这就是说波面随时间而移动, 所以是不稳定的, 也就是说波面高度是随时间而变化的, 从而产生波动, 这种波动称为重力波。实际稳定波面是如左, 即图是  $k - \omega$  曲线。

这种研究方法是一个比较普遍的方法。所有重力波和毛细波时一种不稳定现象, 重力波和毛细波是两种不同的波, 重力波是重力作用的结果, 毛细波是表面张力作用的结果。

### 风力生波的问题

这里我们讨论一个有趣的问题, 即: 当风作用于水面时, 水面是否会产生波动? 这个问题在流体力学中是很重要的, 也是气象学中的一个重要问题。这里我们只讨论重力波, 即: 当风作用于水面时, 水面是否会产生重力波? 这个问题在流体力学中是很重要的, 也是气象学中的一个重要问题。

$$c = (c - u) = - \frac{g_1 u}{g_1 - g_2} + \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{2\pi} \frac{g_2 - g_1}{g_1 g_2} + \frac{2\pi \alpha}{\lambda(g_1 - g_2)} - \frac{g_1 g_2 u^2}{g_1 - g_2} \quad (\text{见柯钦斯, 1949})$$

而被稳定的!! 还是  $0 < u < \sqrt{\frac{4g_1(g_2 - g_1)(g_1 + g_2)^2}{g_1^2 g_2^2}} = 0.46 \text{ 米/秒}$

因此, 当风速  $u$  小于  $0.46 \text{ 米/秒}$  时, 水面不会产生重力波。当风速  $u$  大于  $0.46 \text{ 米/秒}$  时, 水面就会产生重力波。

但是这样分析只能产生波动, 其波速  $c$  与  $u$  有关, 当  $u$  增大时,  $c$  也增大。因此, 当风作用于水面时, 水面会产生波动, 其波速  $c$  与  $u$  有关, 当  $u$  增大时,  $c$  也增大。因此, 当风作用于水面时, 水面会产生波动, 其波速  $c$  与  $u$  有关, 当  $u$  增大时,  $c$  也增大。

**有限幅度的波** 当波幅  $a$  很小时, 波速  $c$  与  $u$  无关, 当  $a$  增大时,  $c$  也增大。

因此, 当风作用于水面时, 水面会产生有限幅度的波, 其波速  $c$  与  $u$  有关, 当  $u$  增大时,  $c$  也增大。

## 第三讲 波阻

## 波的能量

我们考虑在重力作用下，深度为  $h$  的水中的表面波（小振幅波），并假设它是不可压缩的，且为二维运动。波速为  $c$ ，波长为  $\lambda$ 。

$$\eta = \frac{a}{2} \cos(kx - \omega t) \quad \text{或} \quad \eta = \frac{a}{2} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

$$u = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{a}{2} k \sin(kx) \cos(\omega t)$$

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

因此，在长度为  $\lambda$  中的动能就等于

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx$$

如果我们用格林公式，那么

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx$$

由于  $\eta$  是周期函数，所以  $\int_0^\lambda \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx = \int_0^\lambda \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx = \int_0^\lambda \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx$ 。而  $\eta$  和  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$  都是周期函数，且  $\eta$  和  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$  的积分在  $0$  及  $\lambda$  相互抵消。结果只剩余下

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx \quad (\text{这也是用了近似的计算})$$

因此，在  $\lambda$  中的位能是

$$V = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \eta^2 dx$$

现在我们可以直接计算了，我们先算动能，

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{a}{2} k \sin(kx) \cos(\omega t)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \left( \frac{a}{2} k \sin(kx) \cos(\omega t) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho \frac{a^2 k^2}{4} \cos^2(\omega t) \int_0^\lambda \sin^2(kx) dx = \frac{1}{2} \rho \frac{a^2 k^2}{4} \cos^2(\omega t) \frac{\lambda}{2}$$

也就是说

$$T = \frac{\rho a^2 k^2 \lambda}{16} \cos^2(\omega t)$$

同样地，我们算位能

$$V = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \eta^2 dx = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \left( \frac{a}{2} \cos(kx) \cos(\omega t) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho g \frac{a^2}{4} \cos^2(\omega t) \int_0^\lambda \cos^2(kx) dx = \frac{1}{2} \rho g \frac{a^2}{4} \cos^2(\omega t) \frac{\lambda}{2}$$



因此动能定理中  $T+V = \frac{\rho a^2 g \lambda}{4}$ ; 之和是不变的

第二, 动能与位能永远在彼此交换着。

第三, 平均值彼此相等。

对波函数, 取平均  $\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(x,t) dt = u(x,0)$ ,  $\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(x,t) dt = 0$

可以得到  $T = V = \frac{\rho a^2 g \lambda}{4}$ ,  $\frac{T+V}{2} = \frac{\rho a^2 g \lambda}{2}$   
因此, 取定波函数后, 动能和位能都是恒定的, 平均动能等于平均位能。

能量的转移。取进行波, 例如在无限深度的液体中,

$$\eta = \frac{ag}{g} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

$$v_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{agk}{g} e^{kz} \cos(kx - \omega t) = ag e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

而压力  $\int_{-\infty}^0 p dz = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \rho z = ag e^{kz} \cos(kx - \omega t) - \rho z$

我们现在取一条在  $xy$  方向为  $1$  的一条  $xyz$  平面, 我们来计算由于压力所作的功, 设其面积为  $dxdy$ , 而

$$dW = p dz = \int_{-\infty}^0 p dz = \int_{-\infty}^0 (ag e^{kz} \cos(kx - \omega t) - \rho z) dz = \frac{ag}{k} \cos(kx - \omega t) - \frac{\rho}{2} z^2 \Big|_{-\infty}^0$$

在一个周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  中, 这些力所作的功将等于

$$\frac{a^2 g \rho}{2} e^{2kz} \frac{\pi}{\omega} dz = \pi a^2 g \rho e^{2kz} dz$$

对整个面上的功将是

$$W = \pi a^2 g \rho \int_{-\infty}^0 e^{2kz} dz = \frac{\pi a^2 g \rho}{2k} = \frac{\pi a^2 g \rho \lambda}{4\pi} = \frac{a^2 g \rho \lambda}{4}$$

所以单位时间所作的平均功是

$$W_1 = \frac{a^2 g \rho}{4} \frac{\lambda}{T} = \frac{a^2 g \rho \omega}{4}$$

这就是波的能量

$$W_1 = \frac{a^2 g \rho \omega}{4}$$

所以波的能量密度  $\rho_1 = \frac{W_1}{\lambda} = \frac{a^2 g \rho \omega}{4\lambda} = \frac{a^2 g \rho \omega^2}{4\omega\lambda} = \frac{\rho a^2 \omega^2}{4}$







在复平面中，点 \$z = -ih\$ 位于虚轴上。当 \$z\$ 在虚轴上且 \$|z| > h\$ 时，函数 \$w(z)\$ 是全纯的。但在 \$z = -ih\$ 附近，函数 \$w(z)\$ 有奇点。

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z+ih) + g(z)$$

其中 \$g(z)\$ 是点 \$z = -ih\$ 的邻域中的全纯函数。因而

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z+ih) + g(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(z+ih)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z+ih} + g'(z)$$

这里 \$g'(z)\$ 是点 \$z = -ih\$ 的邻域中的全纯函数。

现在我们来求 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处的留数。由于 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处有二阶极点，因此 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处的留数等于 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处的二阶导数的 \$\frac{1}{2!}\$ 倍。于是函数 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处的留数必是实数。

$$\overline{f(x+iy)} = f(x-iy)$$

这时得到的留数是实数。另一方面，由于 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处有二阶极点，因此 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处的留数必是实数。

$$f(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(z+ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z+ih} + g(z)$$

这里 \$g(z)\$ 是点 \$z = -ih\$ 的二阶极点。在有限的距离内，函数 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处有二阶极点。因此 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处的留数必是实数。

$$f(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(z+ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z+ih} + g(z)$$

现在我们来求 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处的留数。由于 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处有二阶极点，因此 \$f(z)\$ 在 \$z = -ih\$ 处的留数必是实数。

$$f(z) = A(z) + B(z)e^{-i\pi z} \quad \text{而 } \frac{dA}{dz} + \frac{dB}{dz}e^{-i\pi z} = 0, \text{ 即 } \frac{dA}{dz} = -\frac{dB}{dz}e^{-i\pi z}$$



$$\frac{dA}{dz} = \frac{dB}{dz}$$

$$\frac{dB}{dz} e^{-ivz} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(z+ih)^2} - \frac{vi}{z+ih} + \frac{1}{(z-ih)^2} + \frac{vi}{z-ih} \right\}$$

或者我们可以换写作

$$\frac{dA}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi v} \left\{ \frac{1}{(z+ih)^2} - \frac{vi}{z+ih} + \frac{1}{(z-ih)^2} + \frac{vi}{z-ih} \right\}$$

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{\Gamma}{2\pi v} e^{ivz} \left\{ \frac{1}{(z+ih)^2} - \frac{vi}{z+ih} + \frac{1}{(z-ih)^2} + \frac{vi}{z-ih} \right\}$$

所以, 条件是  $A \rightarrow 0, z \rightarrow +\infty$ ;  $B \rightarrow 0, z \rightarrow +\infty$ . 故我们得,

$$A = -\frac{\Gamma}{2\pi v} \left\{ \frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih} \right\} + \frac{\Gamma}{2\pi v} \ln \frac{z+ih}{z-ih}$$

$$B = -\frac{\Gamma}{2\pi v} \int_{-\infty}^z e^{ivt} \left[ \frac{1}{(t+ih)^2} + \frac{1}{(t-ih)^2} - \frac{vi}{t+ih} + \frac{vi}{t-ih} \right] dt$$

但是

$$\int_{-\infty}^z \frac{e^{ivt} dt}{(t+ih)^2} = -\int_{-\infty}^z e^{ivt} d\left(\frac{1}{t+ih}\right) = -\frac{e^{ivz}}{z+ih} + iv \int_{-\infty}^z \frac{e^{ivt} dt}{t+ih}$$

$$\int_{-\infty}^z \frac{e^{ivt} dt}{(t-ih)^2} = -\frac{e^{ivz}}{z-ih} + iv \int_{-\infty}^z \frac{e^{ivt} dt}{t-ih}$$

所以, 把结果整理以后, 就是

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih} \right\} - \frac{\Gamma}{\pi} e^{-ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{ivt} dt}{t-ih}$$

这还是在最远的点的结果,

所以我们可以说, 在无穷远处, 我们有

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\Gamma}{\pi} \left\{ \frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih} \right\}$$

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\Gamma}{\pi} \left\{ \frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih} \right\} - \frac{\Gamma}{\pi} e^{-ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{ivt} dt}{t-ih}$$

在无穷远处, 我们取  $z \rightarrow \infty$ , 则  $\frac{dB}{dz} \rightarrow 0$ , 所以

$$f(x) = -\frac{\Gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{t-i\omega} = -\frac{\Gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{t-i\omega}$$

显然, 有

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

所以, 我们取  $t \rightarrow +\infty$  时的极限, 即  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x) = ?$ , 我们取  $t \rightarrow +\infty$  时的极限, 即  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x) = ?$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{t-i\omega} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{t-i\omega} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{t-i\omega} = -2\pi i e^{-\omega h} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{t-i\omega}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z+i\omega} + \frac{1}{z-i\omega} \right\} + 2\Gamma \omega e^{-\omega h} e^{-i\omega t} - \frac{\Gamma \omega}{\pi} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{t-i\omega}$$

$$f(x) = \frac{\Gamma}{\pi} e^{-\omega h} \sin \omega x - \frac{\Gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \cos \nu(t-x) - h \sin \nu(t-x)}{t^2+h^2} dt$$

这中的积分当  $t \rightarrow -\infty$  时趋于零, 因而有  $t \rightarrow +\infty$  时

$$f(x) = \frac{\Gamma}{\pi} e^{-\omega h} \sin \omega x$$

这表明离旋涡后甚远之处, 流体的自由边界是正弦波的形状, 其振幅是

$$a = \frac{\Gamma}{\pi} e^{-\omega h} \sin \omega x$$

$h$  增则  $a$  减!

而波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi c^2}{f}$$

也正是以  $c$  为波速的波长。

此外,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \cos \nu(t-x) - h \sin \nu(t-x)}{t^2+h^2} dt$$

中, 我们以  $-t'$  代  $t$ ,  $dt = -dt'$ , 即成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t' \cos \nu(t'+x) - h \sin \nu(t'+x)}{t'^2+h^2} dt'$$

即  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \cos \nu(t-x) - h \sin \nu(t-x)}{t^2+h^2} dt$  故当  $x \rightarrow -\infty$  时, 其值为零



的形状是一个对称部分 加一个波。

现在取  $W(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dz} \right)^2$  在  $z = -ih$  上的积分。这里  $\frac{dW}{dz}$  是  $W(z)$  的导数。

$$Y+iX = -\frac{c}{2} \oint \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz, \quad \oint \text{是绕 } z = -ih \text{ 的}$$

积分

$$W(z) = W - cz = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z+ih}{z-ih} + \frac{\Gamma}{\pi i} e^{-i\pi/2} \int_{-\infty}^z \frac{e^{i\pi t}}{t-ih} dt - cz$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z+ih} + \left( -\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z-ih} + \frac{\Gamma}{\pi i} \frac{1}{z-ih} - \frac{\Gamma}{\pi} e^{-i\pi/2} \int_{-\infty}^z \frac{e^{i\pi t}}{t-ih} dt \right) - c \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z+ih} + \left( -c + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z-ih} - \frac{\Gamma}{\pi} e^{-i\pi/2} \int_{-\infty}^z \frac{e^{i\pi t}}{t-ih} dt \right) \end{aligned}$$

$\alpha(z)$  是在下半平面的全纯函数。因此, 有

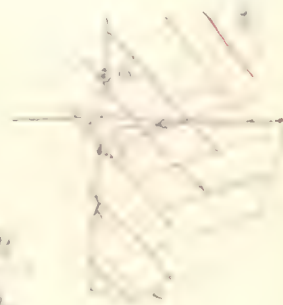
$$\left( \frac{dW}{dz} \right)^2 = -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \frac{1}{(z+ih)^2} + \frac{\Gamma \alpha(z)}{\pi i (z+ih)} + \alpha^2(z)$$

在  $z = -ih$  上的残数是  $\Gamma \alpha(-ih) / \pi i$ , 故

$$\oint \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz = 2\pi \Gamma \alpha(-ih)$$

所以

$$Y+iX = -\Gamma \alpha(-ih) = \Gamma c - \frac{\Gamma^2}{4\pi h} + \frac{\Gamma^2}{\pi} e^{-i\pi/2} \int_{-\infty}^z \frac{e^{i\pi t}}{t-ih} dt$$



$$\begin{aligned} \oint \frac{e^{i\pi t}}{t-ih} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t}}{t-ih} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t}}{t-ih} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t}}{t-ih} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t}}{t-ih} dt \end{aligned}$$

现在我们来研究

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t - ih} dt = -\pi i e^{-h\omega} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t - ih} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t - ih} dt$$

$$r = i\omega(t - ih), \quad du = i\omega dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t - ih} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \frac{du}{i\omega} = \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$= \frac{1}{i\omega} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right] = \frac{1}{i\omega} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right]$$

$$= e^{-\omega h} \left[ Ei(-2\omega h) + 2 \operatorname{Si}(2\omega h) \right], \quad \text{而 } \operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$Y + iX = \left\{ \rho \Gamma e - \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h} + \frac{\rho \Gamma^2}{\pi} e^{-2\omega h} \left[ Ei(-2\omega h) + 2 \operatorname{Si}(2\omega h) \right] \right\} - i\rho \Gamma^2 e^{-2\omega h}$$

X 就是波阻

$$X = -\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h} e^{-2\omega h}$$

$$Y = \rho \Gamma e - \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h} + \frac{\rho \Gamma^2}{\pi} e^{-2\omega h} \left[ Ei(-2\omega h) + 2 \operatorname{Si}(2\omega h) \right]$$

-X 就是波阻, 它是波阻以波长的波幅平方, 如果波幅用  $\frac{1}{c}$  表示

$$X = \frac{1}{4} a^2 g \rho = \frac{1}{4} g \rho \left( \frac{2\Gamma}{c} e^{\frac{2\omega h}{c}} \right)^2 = \frac{g \Gamma^2}{c^2} e^{-\frac{2\omega h}{c}} = -X$$

$\frac{1}{c}$  也就是对深度来说的波幅平方。



第1讲  
水能涌行  
的平板

例题1 (1) 求流场中任意一点的速度

设平板上的速度分布为  $u = a \cos kx$

$$u = a \cos kx$$

那么在表面上

$$p - p_0 = (\rho c^2 - \rho) a \cos kx$$

也就是说在水面上的压力分布是

$$p - p_0 = \rho (\rho c^2 - \rho) a \cos kx$$

而流场中任意一点的速度  $u = F(x)$

$$u - u_0 = F(x)$$

这是一个关于  $x$  的函数，但是我们还不知道  $F(x)$  的具体形式

$$\pi F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u \cos kx dk \int_{-\infty}^{\infty} u \cos kx dx = F \int_{-\infty}^{\infty} \cos kx dk$$

所以  $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u \cos kx}{k - v} dk$ ，其中  $u = a \cos kx$ ，所以  $F(x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{k - v} dk$

$$F(x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{k - v} dk = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{k - v} dk$$

① 如果  $x > 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - v} dk = \pi i e^{ivx} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - v} dk$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k - v} dk = -\pi i e^{-ivx} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k - v} dk$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - v} dk = \pi i e^{ivx} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - v} dk$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k - v} dk = -\pi i e^{-ivx} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k - v} dk$

$$F(x) = \frac{a}{2\pi} \left[ \pi i e^{ivx} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - v} dk - \pi i e^{-ivx} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k - v} dk \right]$$





(4) 现在我们来为下面的计算, 研究一下  $\frac{d\zeta}{dx}$  的值.

为  $x > 0$ , 也就是在  $F$  力之右,

$$\begin{aligned}\zeta'(x) &= -\frac{F}{\pi \rho c^2} \int \frac{t^2 e^{-xt}}{t^2 + v^2} dt = -\frac{F}{\pi \rho c^2} \left( \int \frac{-xt}{t^2 + v^2} dt - v \int \frac{-xt}{t^2 + v^2} dt \right) \\ &= -\frac{F}{\pi \rho c^2} \left( \frac{1}{x} - v \int_0^\infty \frac{e^{-v\zeta} d\zeta}{\zeta^2 + 1} \right) = \frac{F}{\pi \rho c^2} \left( \frac{1}{x} + v \int_0^\infty \frac{e^{-v\zeta} d\zeta}{\zeta^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

因此是

$$\zeta'(x) = \frac{F}{\pi \rho c^2} \left( \frac{1}{x} + \frac{\pi v}{2} - v \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-v\zeta}) d\zeta}{\zeta^2 + 1} \right)$$

为  $x < 0$ , 也就是在  $F$  力之左

$$\begin{aligned}\zeta'(x) &= \frac{F}{\pi \rho c^2} \left( 2\pi v \cos vx + \int \frac{t^2 e^{xt}}{t^2 + v^2} dt \right) \\ &= \frac{F}{\pi \rho c^2} \left( 2\pi v \cos vx - \frac{1}{x} - v \int_0^\infty \frac{e^{-v\zeta} d\zeta}{\zeta^2 + 1} \right) = \frac{F}{\pi \rho c^2} \left( 2\pi v \cos vx - \frac{1}{x} - \frac{\pi v}{2} + v \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-v\zeta}) d\zeta}{\zeta^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

所以如果  $v = \frac{F}{c^2}$  是很小的话, 那么

$$\text{为 } x > 0, \quad \zeta'(x) \approx \frac{F}{\pi \rho c^2} \left( -\frac{1}{x} + \frac{\pi v}{2} \dots \right)$$

$$\text{而当 } x < 0 \quad \zeta'(x) \approx \frac{F}{\pi \rho c^2} \left( -\frac{1}{x} + \frac{3\pi v}{2} \dots \right)$$

我们在下面利用这个结果来计算在水面以速度运动的平板上所受的力.

平板以何速度运动

如果在平板上的应力分布是  $p(x) = f(\zeta)$ ,  $x = -b$ , 那么如果速度 = 零, 那么

$$\pi \rho c^2 a = \int_{-b}^b \frac{d}{dx} \left( \int \frac{p(x)}{x-v} dx \right) dx = \int_{-b}^b \frac{f(\zeta)}{x-v} dx = \int_{-b}^b \frac{f(\zeta)}{x} dx + \int_{-b}^b \frac{f(\zeta)}{x-v} dx$$

因此设

$$f(\zeta) = f^0(\zeta) + v f^1(\zeta) + \dots$$

$$\eta \text{ 么 } \pi \rho c^2 \alpha = \int_0^b \frac{f'(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (I)$$

$$-\frac{\pi}{2} \int_0^x f'(\xi) d\xi - \frac{3\pi}{2} \int_x^b f'(\xi) d\xi = - \int_0^b \frac{f'(\xi) d\xi}{\xi - x} \quad (II)$$

这里  $f'$  是速度分布  $U(\xi)$ ,  $f'(\xi)$  与  $\xi$  成正比, 也就是说  $f'(\xi) = U(\xi)$  是线性分布, 且  $f'(0) = 0$ ,  $f'(b) = U(b)$ .

现在我们要解方程, 有一个积分方程, 小量  $\alpha$  和  $f'$  是未知数, 求  $\alpha$ .

$$\frac{b}{2}(1 - \cos \theta) = \xi, \quad d\xi = \frac{b}{2} \sin \theta d\theta$$

$$\frac{b}{2}(1 - \cos \theta) = x$$

$\eta$  么 因此第一个积分方程可以换写为:

$$\pi \rho c^2 \alpha = \int_0^\pi \frac{f' \cdot \sin \theta d\theta}{\cos \theta - 1}$$

我们在这里可以利用 = 无元翼剖面理论的经验, 命

$$f' = A_n \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\eta \text{ 么 } f' \cdot \sin \theta = A_n \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = A_n (1 - \cos \theta)$$

$$\text{因此 } \pi \rho c^2 \alpha = A_n \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \theta) d\theta}{\cos \theta - 1} = A_n \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta - 1} + A_n \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - 1}$$

但是我们知道

所以

作为一级近似, 我们得到

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - 1} = \pi \frac{\sin \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \quad A_n = \rho c^2 \alpha$$

$$f'(\xi) = \rho c^2 \alpha \cdot \tan \frac{\theta}{2} = \rho c^2 \alpha \sqrt{\frac{3/\frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{2}}} = \boxed{\rho c^2 \alpha \sqrt{2 - \frac{3}{2}}}$$

我们这里可以求出速度分布  $U(\xi)$  与  $\xi$  成正比, 且  $U(0) = 0$ ,  $U(b) = U(b)$ .

$$U(\xi) = \frac{b}{2} \sqrt{2 - \frac{3}{2}} \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta \quad \boxed{\pi \rho c^2 \alpha \sqrt{2 - \frac{3}{2}}}$$

从这我们可以看出, 在水面滑行的平板, 如果其剖面形状, 那么它的升力系数是



$$C_2 = \frac{L}{\rho r^2 b} = \pi \alpha$$

这又与半无限平面问题一致。我们之所以从表面以下的问题上求解应力，是因为我们只考虑表面以下的问题，而不考虑表面以上的问题，在表面以上的问题，我们认为是自由表面，没有外力作用。因此，我们只考虑表面以下的问题，这样，问题就与半无限平面问题一致，在表面以上的问题，我们认为是自由表面。



因此我们考虑这个问题：

$$\int_0^b f'(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^b f'(x) dx + \frac{3\pi}{2} \int_0^b f'(x) dx$$

这里，我们要考虑的是，在表面以下的问题，我们只考虑表面以下的问题，而不考虑表面以上的问题，在表面以上的问题，我们认为是自由表面，没有外力作用。因此，我们只考虑表面以下的问题，这样，问题就与半无限平面问题一致，在表面以上的问题，我们认为是自由表面。

$$\int_0^b \frac{f'(x) \sin \theta dx}{\cos \theta - \cos \phi} = \frac{\pi}{2} \int_0^b \rho c^2 \alpha \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) d\theta + \frac{3\pi}{2} \int_0^b \rho c^2 \alpha \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$= \rho c^2 \alpha \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} (\phi - \sin \phi) + \frac{3\pi}{2} (\pi - \phi + \sin \phi) \right]$$

$$= \rho c^2 \alpha \frac{1}{2} \left[ \frac{3\pi^2}{2} - \pi \phi + \pi \sin \phi \right] = \frac{1}{2} \pi \rho c^2 \alpha \left[ \frac{3\pi}{2} - \phi + \sin \phi \right]$$

我们考虑的是，在表面以下的问题，我们只考虑表面以下的问题，而不考虑表面以上的问题，在表面以上的问题，我们认为是自由表面，没有外力作用。因此，我们只考虑表面以下的问题，这样，问题就与半无限平面问题一致，在表面以上的问题，我们认为是自由表面。

$$\frac{1}{2} \pi \rho c^2 \alpha \left[ \frac{3\pi}{2} - \phi + \sin \phi \right] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\phi$$

也就是说

$$A_0 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \pi \rho c^2 \alpha \int_0^b \left[ \frac{3\pi}{2} - \phi + \sin \phi \right] d\phi$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{2} \pi \rho c^2 \alpha \left[ \frac{3\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + 2 \right] = \frac{1}{2} \rho c^2 \alpha \left( \frac{\pi^2}{2} + 2 \right) = A_0$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \pi \rho c^2 \alpha \int_0^b \left[ \frac{3\pi}{2} - \phi + \sin \phi \right] \cos n\phi d\phi = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \pi \rho c^2 \alpha \left[ \frac{3\pi}{2} \int_0^b \cos n\phi d\phi - \int_0^b \phi \cos n\phi d\phi + \int_0^b \sin \phi \cos n\phi d\phi \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \pi \rho c^2 \alpha \left[ \frac{3\pi}{2} \frac{1 - (-1)^n}{n} - \left[ \frac{\phi \sin n\phi}{n} + \frac{\cos n\phi}{n^2} \right]_0^b + \left[ \frac{\sin \phi \cos n\phi}{n} + \frac{\cos \phi \sin n\phi}{n} \right]_0^b \right]$$

因此如果我们令

$$\pi \phi = \theta, \quad \phi = \frac{\theta}{\pi}, \quad d\phi = \frac{d\theta}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f'(x) \sin x}{x} &= \frac{1}{x} \left[ -A_0 \tan \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tan nx \right] \\
 &= \frac{1}{x} \left[ -A_0 \tan \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tan nx \right] \\
 &= \frac{1}{x} \left[ -A_0 \tan \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tan nx \right] = \frac{1}{x} \left[ -A_0 \tan \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tan nx \right]
 \end{aligned}$$

所以我们的解的确能满足第二个积分方程, 而

$$f'(0) = \frac{1}{\pi} \left[ -A_0 \tan \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tan n0 \right]$$

也就是说一直到二次近似,

$$f(0) = f'(0) + \nu f'(0).$$

因为

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f'(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ -A_0 \tan \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tan nx \right] dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ -A_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \ln 2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以一直到二次近似, } f(0) &= \frac{1}{\pi} \left[ -A_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \ln 2 \right] = \frac{1}{\pi} \ln 2 \left[ -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln 2 \left[ -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right] = \frac{1}{\pi} \ln 2 \left[ -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right]
 \end{aligned}$$

这可以写成如下形式:

$$\left[ C - \frac{1}{\pi} \ln 2 \left( \pi - \frac{2b}{L} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right] = \pi \left[ 1 - \frac{2b}{L} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

这个结果说明引力的作用是吸引上升。

因为作用在平面上的引力作用是垂直于板面的, 所以引力一定是垂直于板面, 因此引力上的引力系数是

$$D = \alpha \cdot L = \frac{1}{2} \rho c^2 b \left[ \pi - \frac{2b}{L} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \alpha^2 = \frac{1}{2} \rho c^2 b \cdot \pi \left[ 1 - \frac{2b}{L} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \alpha^2$$

$$C_b = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho c^2 b} = \left[ \pi - \frac{2b}{L} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \alpha^2 = \pi \alpha^2 \left[ 1 - \frac{2b}{L} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

## 船舶造波阻力的讨论：

船舶在水面行驶时所遇到的问题也是讨论船舶造波阻力的问题。如果从数学上讲，我们假设水面是一个自由液面，当船在水面上行驶时，这个自由液面会产生一些速度，先是这个速度一定不能满足想一回的压力条件，于是我们引入另一个速度场来使得满足这个条件，而这个速度场就是自由液面的速度，这个速度场就是自由液面的速度，这个速度场就是自由液面的速度。

如果从物理上讲，那么我们就用一个速度场来代替水面上的速度场，我们的目的是为了得到一个统一的公式。

这样做的目的是为了得到一个统一的公式，但是物理上为什么物理上这个速度场和实际的速度场会有一些差别，这个差别就是由于物理上的原因，下面我们来看一下这个差别。



1. 它给出阻力  $R$  的上下波动太大，实验结果一般波动较小。
2. 理论没有包括水的粘性影响，而这一影响可能是形变方面的，一方面形成另外一种阻力，摩擦阻力；另一方面则加到波阻上去，作为总的阻力。而另一方面有粘性就有边界层，即边界层可能使波在固体表面上的反射

而物理上，这个  $V/\sqrt{gL}$  所代表的理论也有能估计出来。有可能这个边界层在船体表面上的速度场和船体表面的速度场会有一些差别，这个差别就是由于物理上的原因，下面我们来看一下这个差别。



195 年 月 日

中国科学院  
力学研究所

第五讲

## 浅水中的长波

建立方程

我们要在这一讲里讨论水流和波的问题，我们假设运动的特征长度远远比水深大，也就是说我们从另外一个方面来讨论问题：我们在以前讨论过，水深比特征长度小得多，也就是小水深的情况，现在我们要讨论相反的情况，即水深比特征长度大得多，也就是说大水深的情况；但是我们要讨论的是比特征长度小得多，这样的情况下，我们讨论以  $x, y$  为变量的平面，而水底的面是

$$z = -h(x, y)$$

水流的速度场和流函数的形式是

$$\mathbf{u} = \nabla \psi(x, y, t)$$

因此在水深  $h$  处， $\mathbf{u} = \nabla \psi(x, y, t) + \mathbf{g}h$ ，在这样的水深里，流体的运动速度是，如果我们用  $c$  来表示，

$$c = \sqrt{g(h)}$$

我们假设是研究一维运动，即我们只考虑  $x$  方向的运动，一维运动。

运动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

1955年 月 日

中国科学院  
力学研究所

边界条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

在自由面上，我们有一个压力条件

$$p - p_0 = 0$$

此外我们也有一个运动学的条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} + V \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

而在水底，我们的边界条件是底面必须是平的，也就是

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + U \frac{\partial \psi}{\partial y} + V \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} + V \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

我们简化计算的方法是放弃研究在水深方向，也就是 \$y\$ 向的细节，先研究 \$x\$ 向总的，也就是 \$x\$ 向的积分量。也就是我们假设

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

也就是

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

但是

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

所以

195 年 月 日

中国科学院  
力学研究所

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right)$$

一、运动方程：运动方程是：(1) 连续性方程，(2) 运动方程，(3) 能量方程。一切运动方程都是守恒方程，而守恒方程是非常小的，那么在第三个运动方程中，它的右边项是不守恒的。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right)$$

因此如果运动方程是守恒方程，那么它是不守恒的。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right)$$

其他两个运动方程是：(1) 连续性方程，(2) 运动方程，(3) 能量方程。它们都是守恒方程。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right)$$

因此运动方程是不守恒的，而运动方程是守恒的，所以运动方程是不守恒的。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right)$$

运动方程是不守恒的，而运动方程是守恒的，所以运动方程是不守恒的。从压力公式求压力，很显然，现在的问题是守恒性的了。

运动方程的形式

三面将运动方程写成：(1) 连续性方程，(2) 运动方程，(3) 能量方程。三面将运动方程写成：(1) 连续性方程，(2) 运动方程，(3) 能量方程。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right)$$

二、运动方程的形式：运动方程是：(1) 连续性方程，(2) 运动方程，(3) 能量方程。



195 年 月 日

中國科學院  
力學研究所

$$\bar{T} = \int (p - p_0) dz$$

所以這個式子，如果我們以「 $p - p_0$ 」而「 $dz$ 」為一個微元，

$$\bar{T} = \int p_0 \cdot dz = \frac{p_0}{\rho} \cdot \bar{z}$$

所以這個式子中，如果我們以「 $p - p_0$ 」而「 $dz$ 」為一個微元，這是一個等熵過程的方程式，而「 $p - p_0$ 」則是一個微元的量，所以這個方程式變成

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho}$$

但是這個式子不是時間的函數，

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho}$$

所以這個式子變成

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho}$$

這就是說，這個式子中， $\frac{dz}{dz}$  是一個定值，

所以這個式子可以寫成

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho}$$

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho}$$

易知！

所以如果我們是一個定值，那麼這個式子就是「 $p - p_0$ 」，所以這個式子，

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho}$$

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho}$$

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{p - p_0}{\rho}$$

所以這個式子中，如果我們以「 $p - p_0$ 」而「 $dz$ 」為一個微元，那麼這個式子，

195 年 月 日

中国科学院  
力学研究所

由于这种深入的研究，使我们能够建立一些模型，用来解决二元气动力学的许多问题。我们不说如果  $u \sim \sqrt{1/(k+c)}$  (在声速处)，如果  $u > \sqrt{1/(k+c)}$ ，那么我们就知道，在这样一个模型中，我们可以应用相似律来研究流动。当然，这还不够。

自然，我们在研究水流问题时，不能只限于讨论相似律，还必须考虑到液体的粘性。在流体力学中，我们通常讨论水的回流层以及边界层。如果边界层太小，小到我们可以忽略它的厚度，那就没有问题了。可是，如果边界层太厚，以至于我们不能忽略它，那我们还能在模型中加以研究吗？更确切地说，

在高雷诺数下

### 高速气流的水流模型

我们通常研究的模型是：在高速气流中，有一个物体，它周围的水流速度很快，以至于我们可以忽略水的粘性。但是，如果我们用泵把水打进水槽，水槽底部有一个孔，水流从孔中流出，从而得到回流层。在这种情况下，我们通常认为，不过为了保持水流速度，槽底的下倾，使得压力差能抵消阻力。模型是一个柱形体。

我们制造一个模型是十分容易的，但是如果我们希望它的一边是光滑的，另一边是粗糙的，那么我们就必须制造一个粗糙的模型。但是，如果我们希望它的一边是光滑的，另一边是粗糙的，那么我们就必须制造一个粗糙的模型。但是，如果我们希望它的一边是光滑的，另一边是粗糙的，那么我们就必须制造一个粗糙的模型。

在  $x=2$  处，不是光滑的，所以，水流速度不能保持。水流速度不能保持，所以，水流速度不能保持。水流速度不能保持，所以，水流速度不能保持。

而水流速度不能保持，所以，水流速度不能保持。水流速度不能保持，所以，水流速度不能保持。水流速度不能保持，所以，水流速度不能保持。

195 年 月 日

中国科学院  
力学研究所

所以总的说来,水动力学模型只是气动力问题的定性实验,而不是定量的实验。

我們也看到,如果在水流的模拟中,雷诺数 $Re=1$ ,马赫数 $Ma=1$ 是常数,那么

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v \frac{\partial v_x}{\partial x} + v \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v \frac{\partial v_y}{\partial x} + v \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g$$

所以如果这样的流动不是定常的,那么由(1)和(2)可知,流动是定常的,这就是说水动力学模型又是一种定常流动。

特例: 定常流动

现在我们把问题简化,只考虑一维流动,那么(1)和(2)又简化为: 定常流动,即

$$\rho v \frac{dv_x}{dx} = - \frac{dp}{dx}$$

连续方程是

$$\rho v = \text{const} = \rho_0 v_0$$

因此

$$\frac{dv_x}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad \text{或} \quad \frac{dp}{dx} = - \rho \frac{dv_x}{dx}$$

所以(1)和(2)可以写成

$$\rho v \frac{dv_x}{dx} + \rho v \frac{dv_y}{dx} + \rho c \frac{dc}{dx} = \frac{dH}{dx} = 0 \quad (1)$$

而连续方程可以写成

$$\rho v = \rho_0 v_0 = \text{const} = \rho_0 v_0$$

所以

$$2 \frac{dc}{dx} + 2v \frac{dv_x}{dx} + c \frac{dv_y}{dx} = 0 \quad (2)$$

如果我们将(1)和(2)相加

$$\rho v \frac{dv_x}{dx} + \rho v \frac{dv_y}{dx} + \rho c \frac{dc}{dx} = 0$$



1955 年 月 日

中国科学院  
力学研究所

加印得到

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (v+c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (v+c-mt) = 0$$

即如果把 (1) 及 (2) 相减, 我们就得到

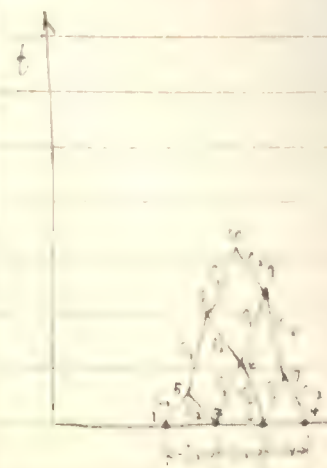
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (v-c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (v-c-mt) = 0$$

从这两个方程, 我们可以看出, 在任一时刻  $t$ ,  $x$  轴上的各点,  $v$  和  $c$  都是常数。即  $v$  和  $c$  都是常数,  $v-c-mt = k_1$  常数同样的, 在  $c$  上,

$$\frac{dx}{dt} = v-c$$

$$v-c-mt = k_2 = \text{常数}$$

所以, 如果我们知道  $v$  和  $c$  的初始值, 那么, 在任一时刻  $t$ ,  $v$  和  $c$  都是常数。而且, 在任一时刻  $t$ ,  $v$  和  $c$  都是常数。如果我们知道  $v$  和  $c$  的初始值, 那么, 在任一时刻  $t$ ,  $v$  和  $c$  都是常数。这就是  $v$  和  $c$  的守恒性。这就是  $v$  和  $c$  的守恒性。

那么, 如果我们知道  $v$  和  $c$  的初始值, 那么, 在任一时刻  $t$ ,  $v$  和  $c$  都是常数。

要研究的是初始条件问题: 也就是说, 在  $t=0$  的时候, 给定了  $v$  和  $c$  的值。给了  $t$ , 从  $v$  和  $c$  就能求  $c$ , 所以沿着  $x$ -轴, 我们有  $v$  及  $c$  的分布。现在在  $x$ -轴上取一点  $x_0$ , 它对应于  $t=0$  时的  $v$  和  $c$  的值。让这两点为  $v_0$  及  $c_0$ 。

水跃

我们取一个距离  $x$  为  $0$  的一对点作图  
 $y(x, 0)$  及  $y(x, 1)$ , 它们为增函数且  
 不连续断面引伸。那么连续方程又

运动方程为

$$\frac{d}{dx} \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} f(x, t) dt = f(x, a_2(x)) \cdot a_2'(x) - f(x, a_1(x)) \cdot a_1'(x) + \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

195 年 月 日

中国科学院  
力学研究所

这里的积分形式是

$$I = \int_{a(t)}^{b(t)} \eta(x, t) dx$$

而  $\eta(x, t)$  ( $x=a(t)$  到  $x=b(t)$ ) 有一个不连续点。我们假设它是

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \eta(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{c(t)} \eta(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{c(t)}^{b(t)} \eta(x, t) dx$$

$$= \int_{a(t)}^{c(t)} \frac{\partial \eta}{\partial t} dx + \eta(c(t), t) \dot{c}(t) - \eta(a(t), t) \dot{a}(t) + \int_{c(t)}^{b(t)} \frac{\partial \eta}{\partial t} dx + \eta(b(t), t) \dot{b}(t) - \eta(c(t), t) \dot{c}(t)$$

因为  $\eta$  在  $x=c(t)$  处有一个不连续点， $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}$  是  $c(t)$  对  $t$  的导数。  
 $\eta(a(t), t)$  是  $\eta$  在  $x=a(t)$  处的值， $\eta(b(t), t)$  是  $\eta$  在  $x=b(t)$  处的值。  
 如果  $\eta$  在  $x=c(t)$  处有一个不连续点，那么  $\eta$  在  $x=c(t)$  处的左右极限不相等，即

$$\lim_{x \rightarrow c(t)^+} \eta = \eta_+(c(t), t) \neq \eta_-(c(t), t) = \lim_{x \rightarrow c(t)^-} \eta$$

这里  $\eta_+$  是  $\eta$  在  $x=c(t)$  处的右极限， $\eta_-$  是  $\eta$  在  $x=c(t)$  处的左极限。而

$$\begin{aligned} \eta_+ &= \eta(c(t), t) \\ \eta_- &= \eta(c(t), t) \end{aligned} \quad (3)$$

我们利用它得到一个关系式

$$\eta_+(c(t), t) - \eta_-(c(t), t) = \eta(c(t), t) \quad (4)$$

$$\eta_+(c(t), t) - \eta_-(c(t), t) = \frac{1}{2} \eta_+(c(t), t) + \frac{1}{2} \eta_-(c(t), t) \quad (5)$$

如果  $\eta$  在  $x=c(t)$  处有一个不连续点，那么  $\eta$  在  $x=c(t)$  处的左右极限不相等，即  $\eta_+ \neq \eta_-$ 。  
 如果  $\eta_+$  和  $\eta_-$  不相等，那么  $\eta$  在  $x=c(t)$  处有一个不连续点。我们也可以用第一方程来验证。  
 第一个方程，把它写成

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta_+ - \eta_-) = \frac{1}{2} \eta_+ (\eta_+ - \eta_-) - \frac{1}{2} \eta_- (\eta_+ - \eta_-) \quad (6)$$

(4) 和 (6) 就是  $\eta_+$  和  $\eta_-$  的方程。

(4) 和 (6) 也可以写成



195 年 月 日

中国科学院  
力学研究所

由  $\rho u_1 = \rho_0 u_0 = m$ ,  $m(u_1 - u_0) = \bar{F}_1 - \bar{F}_0$   
 可知在单位时间内通过截面的质量流量， $x=0$  处流量是  $\rho_0 u_0$ ， $x=1$  处流量是  $\rho_1 u_1$ ，  
 是由于力的作用。

16) 式也可以写成

$$\rho_0 (s_0 + h) u_0^2 (1 - \frac{u_1}{u_0}) = \frac{1}{2} \rho_0 (s_0 + h)^2 \left[ \frac{(s_1 + h)}{(s_0 + h)} - 1 \right]$$

或者 4) 式写成

$$u_0^2 \left[ 1 - \frac{s_1 + h}{s_0 + h} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{(s_1 + h)}{(s_0 + h)} - 1 \right]$$

所以是

$$\frac{s_1 + h}{s_0 + h} + \frac{s_1 + h}{s_0 + h} - 2 \frac{s_1 + h}{s_0 + h} = 1$$

$$\text{所以 } \frac{u_1}{u_0} = \frac{s_0 + h}{s_1 + h} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{s_1 + h}{s_0 + h} + \frac{s_1 + h}{s_0 + h} \right] = \frac{s_0 + h}{s_1 + h} \text{ 因为 } \frac{s_1 + h}{s_0 + h} > 1, \text{ 所以 } \frac{u_1}{u_0} < 1$$

因为流量是守恒的，所以是  $\rho u_1 = \rho_0 u_0$ ， $m(u_1 - u_0) = \bar{F}_1 - \bar{F}_0$ ，  
 所以  $\frac{u_1}{u_0} = \frac{s_0 + h}{s_1 + h}$ ，  
~~所以  $\frac{u_1}{u_0} = \frac{s_0 + h}{s_1 + h}$ ，  
 所以  $\frac{u_1}{u_0} = \frac{s_0 + h}{s_1 + h}$ ，  
 所以  $\frac{u_1}{u_0} = \frac{s_0 + h}{s_1 + h}$ ，  
 所以  $\frac{u_1}{u_0} = \frac{s_0 + h}{s_1 + h}$ 。~~

三 现在我们再讨论一下水波中能量的变化，我们在前面研究过水波  
 的能量变化，现在再讨论一下水波的能量变化。

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho_0 \int_{-h}^{s_0} \left( u^2 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{s_0 + h} \right) dx - \int_{-h}^{s_0} \left( \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \right) dx - \int_{-h}^{s_0} \left( \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \right) dx$$

我们让  $s_0 \rightarrow s_1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2} \rho_0 \int_{-h}^{s_1} \left( u^2 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{s_1 + h} \right) dx - \int_{-h}^{s_1} \left( \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \right) dx - \int_{-h}^{s_1} \left( \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} m (u_1^2 - u_0^2) + \bar{F}_1 u_1 - \bar{F}_0 u_0 + \bar{F}_1 u_1 - \bar{F}_0 u_0 \end{aligned}$$

如果我们 1) 式乘上  $u_1$ ,

$$m(u_1 - u_0)u_1 = \bar{F}_1 u_1 - \bar{F}_0 u_0 - \bar{F}_1 u_1 + \bar{F}_0 u_0$$

把上面两个公式相减，我们得到：

$$h_0 \quad 5 \quad 10$$

水波中  
 能量的  
 变化。

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) + m (u_1 - u_0) \dot{\xi} + 2 \bar{p}_1 u_1 - 2 \bar{p}_0 u_0 \\ &= \frac{1}{2} m (u_1 - u_0) (v_1 + v_0) - \frac{m}{2} (u_1 - u_0) (v_1 - u_1) - \frac{m}{2} (u_1 - u_0) (v_0 - u_0) + \bar{p}_1 u_1 - \bar{p}_0 u_0 \\ &= m \left[ \frac{1}{2} (u_1^2 - u_0^2) + 2 \left( \frac{\bar{p}_1}{\rho_1} - \frac{\bar{p}_0}{\rho_0} \right) u_1 \right]\end{aligned}$$

於是

$$u_1 = \frac{v_1 + v_0}{2}, \quad u_0 = \frac{v_1 - v_0}{2}, \quad \bar{p}_1 = \frac{\rho_1}{2} (v_1^2 - v_0^2), \quad \bar{p}_0 = \frac{\rho_0}{2} (v_1^2 - v_0^2)$$

所以

$$\frac{dE}{dt} = m \left[ \frac{m^2}{2} \left( \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_0^2} \right) + \frac{2}{\rho_1} (\bar{p}_1 - \bar{p}_0) \right]$$

$$\text{而由(7)} \quad m^2 = \frac{\bar{p}_0 - \bar{p}_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0}} = \frac{2}{\rho_1} \frac{\bar{p}_0 - \bar{p}_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0}}$$

因而

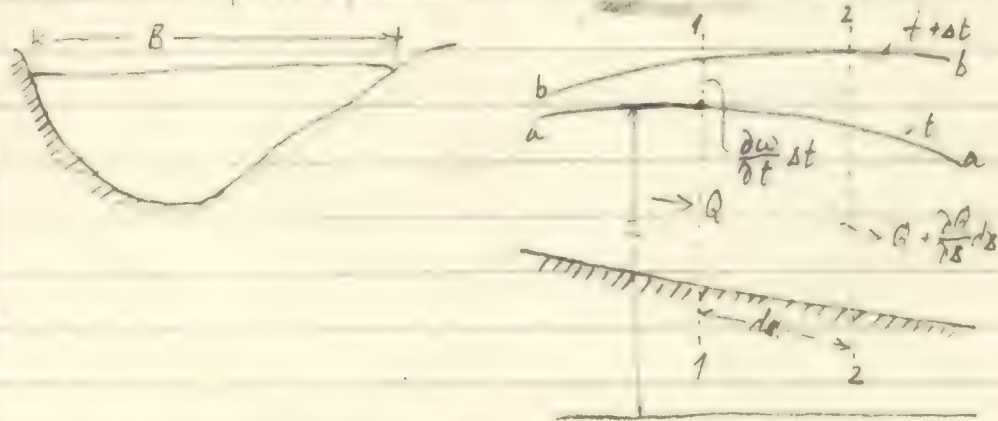
$$\frac{dE}{dt} = \frac{m^2}{\rho_1} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{\rho_0^2} \right) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0} \right) + \frac{\bar{p}_0 - \bar{p}_1}{\rho_1} \right] = \frac{m^2}{\rho_1} \frac{(\bar{p}_0 - \bar{p}_1)^2}{4 \bar{p}_1 \bar{p}_0} \quad \text{故}$$

如果

机械能守恒。这个定理乃以通过水波中的熵流来理解：水波产生熵流，熵流正所由于粘性液体的而变或热。如果  $\rho_0/\rho_1 < 1$ ，那么机械能将被产生出来，这就没有问题了，因此  $\rho_0/\rho_1 > 1$ 。那么照上面的公式  $\rho_0/\rho_1 > 1$ ，也就是说水波前的水流必须是超临界速度的！

我們先來建立計祿河道和明渠中流動的一般基本方程：

如果在时间  $t$  瞬间, 自由水面位置为  $a-a$ , 在  $t+\Delta t$  时, 位置是  $b-b$ . 在水流中取两断面 1 和 2-2 间的一段来考虑。如下图所示



相距一个极小的距离  $dx$  现在来讨论在时刻  $t$  时  $x$  处这个流段中的流量的变化。设  $Q$  为流量， $A$  为断面。

在时间  $\Delta t$  内, 通过断面 1-1 的总流量是  $Q\Delta t$ , 而流出的量是  $(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x)\Delta t$ , 故净流入量是  $-\frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \Delta t$ , 而水量在流段中的体积变化为  $\frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \Delta t$ , 可以证明: 或是

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

其中  $\frac{\partial w}{\partial t}$  是单位时间单位面积上通过  $1-1$  截面的流量， $\frac{\partial Q}{\partial x}$  是负的。  
如果  $\bar{v}$  是断面中的平均速度，那么  $Q = V\bar{v}$ ；而且  $\frac{\partial w}{\partial t} = B \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ ， $B$  是  
1-1 断面在  $t$  时刻的面积，因而连续方程式也可以写作

$$E \frac{Z}{r} + \frac{\gamma(V)}{r} = q$$

在矩形河槽的情况下,  $\alpha = B^2$ , 这里  $B$  是水流深度。因此, 在这个情况下,

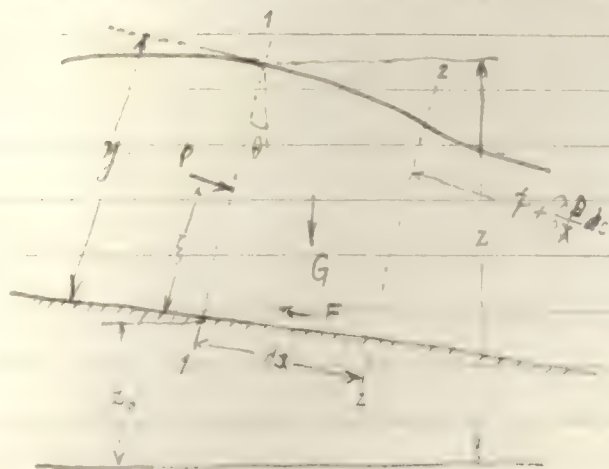
$$\frac{24}{1} = \frac{24V}{24} = 91$$



中国科学院  
力学研究所

1955年11月11日

现在我们来讨论这个公式。设水流断面宽度变化由水深引起，这种



以数来决定，就是：

$$b = f(y)$$

它是沿垂直于 $x$ 轴的方向计算的。设在  $0 \leq x \leq y$  范围内取一微元  $dx$  为 1-1 面的水深。则

$$w = \int_0^y b dx dy$$

此断面 1-1 上的总的水压力  $P$ ，如果用流体的比例

$$P = \rho g \cos \theta \int_0^y (y-x) f(y) dx$$

其中  $\theta$  为河床线对水平线的倾角。因为  $\theta$  小， $\cos \theta \approx 1$ ，

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial y}{\partial x} \int_0^y f(y) dx = \rho g \frac{y}{2x}$$

故在  $dx$  段上作用的合力是

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx = \rho g \omega \cdot \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

摩阻力的计算是在定常流情况下，由实验或经验得来的。

$$-F = \tau x dx$$

而  $\tau$  为剪力， $\omega$  为湿周。我们在引用定常流的资料时，我们的假设是：



1955 年 月 日

中国科学院  
力学研究所定常流、急流问题

定常流是一个非常重要的问题，在计算上它是一个比非定常流更简单的问题。在流体力学中，定常流是指流体的运动参数（速度、压力、密度等）不随时间而变化的流动。在河流动力学中，定常流是指河流中的水流速度、水深等参数不随时间而变化的流动。定常流可以分为两种：一种是均匀流，另一种是非均匀流。均匀流是指流速沿程不变的流动，而非均匀流是指流速沿程变化的流动。在河流动力学中，定常流的研究对于河流的治理、防洪、航运等方面具有重要的意义。

$$\text{即 } \tau = \frac{1}{2} \rho g R S, \quad \tau = \frac{1}{2} \rho g R S$$

其中  $\tau$  是底摩擦的粗糙度系数。另一，常用的公式是 Manning 公式，

$$\text{即 } \tau = \frac{1}{2} \rho g R S$$

而  $\gamma$  是一个无量纲的粗糙度系数。

理论上的 Manning 公式是由研究而得到的，它是由定常流、急流、这样连续方程式是

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

连续方程式为

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

即

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) R^{2/3} S^{1/2} = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

这样我们就可以得到

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

而同时， $\tau = \frac{1}{2} \rho g R S$ ，所以从连续方程式可以得到，定常流、急流、



195 年 月 日

中國科學院  
力學研究所

什麼時候  $P = \frac{1}{2} \rho v^2$  會是定常流？這要由  $\frac{dP}{dt} = 0$  決定，但是  $\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \rho v \frac{dv}{dt}$ ，所以  $\frac{dv}{dt} = 0$ ，也就是說  $v$  是定常的，也就是說  $\frac{dP}{dt} = 0$ ，所以  $P$  是定常的。

所以  $\frac{dP}{dt} = 0$ ，所以  $P$  是定常的。

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dx$$

當  $v = 0$  的時候， $x = 0$ 。我們來研究一下，如果  $v = \frac{c}{2} + \epsilon$  的時候， $x$  當是什麼？而  $y^*$  是平行由定常流的  $y$ ，也就是說

$$\frac{y}{x} = \frac{y^*}{x^*} = \frac{y^*}{x^*}$$

所以

$$P = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{c}{2} + \epsilon \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{c^2}{4} + c\epsilon + \epsilon^2 \right) = \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{4} + \rho c \epsilon + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{4} + \rho c \epsilon + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 = \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{4} + \rho c \epsilon + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{4} + \rho c \epsilon + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 = \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{4} + \rho c \epsilon + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2$$

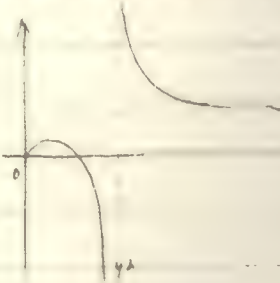
$$= \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{4} + \rho c \epsilon + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 = \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{4} + \rho c \epsilon + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{4} + \rho c \epsilon + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 = \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{4} + \rho c \epsilon + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2$$

用  $\epsilon$  表示  $y$ ， $P > 0$ ， $\epsilon > 0$ ，所以

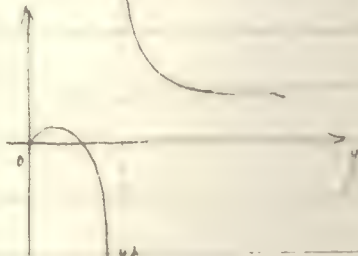
195 年 月 日

中國科學院  
力學研究所



$x - y_{xx} = c/\sqrt{1-y'^2}$

因此如果我们设  $y$  是一个任意函数, 那么  $y = y^*$  时, 上式可以简化为  $c/c = 1$ . 这还是在  $y$  小于  $y^*$  (谷底) 或以  $y$  大于  $y^*$  (山顶), 我们不断地逼近了  $y^*$ , 又都趋向  $-c$ . 这就是说尽管我们假设, 曲线中的木梁只能从  $y^*$  走向  $y^*$ , 而不能从  $y \neq y^*$  走向  $y^*$ .

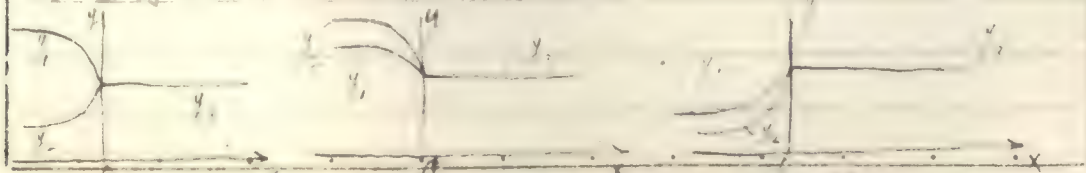


这一个问题的结论是  $\Delta \ln \mu$  的公式是随深度而变的, 其实问题的中心不是阳离子, 而是在深度中, 如果我们把一定范围下, 增加深度  $h$ ,  $\Delta \ln \mu$  是增大还是减小? 如果是减小则

$$A = i - \frac{2\lambda}{\rho \omega^2}$$

[illegible]

我们从这一个讨论得到有支流汇合或一股主流的分岔问题  
问题的定性解答：因为两支流汇合或一股主流的分岔，  
但两支流的  $y^*$  一般不一样，叫做是  $y_1^*$ ,  $y_2^*$ 。而合流后的  
 $y^*$  即  $y_3^*$  也不是简单等于  $y_1^*$  或  $y_2^*$ 。或从上面做分析可知  
随着变化， $y^*$  只有  $y_1^*$  及  $y_2^*$  变化的一个函数。也就是说  
如图所示的合流附近水深的变化。


$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad x_1, x_2, \dots, x_n \quad x_1, x_2, \dots, x_n \quad x_1, x_2, \dots, x_n$$

它們也是許多矩形的中線，不論其大小， $i=1, 2, \dots, n$ 。

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

[illegible]

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx} + \frac{\tau^2}{2u}$$

on 6-2-76 in Argentina, 1/2

$$\frac{dV}{dt} = \gamma \frac{V}{1 + \beta \gamma^2}$$

1911年12月

$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{dt}$

于是我们就不难看到，在一切情形下， $x$ -轴上的点，  
 都是  $y$ -轴上  $x$ -轴上的点，即  $x$ -轴上的点，  
 都是  $y$ -轴上的点。

$$\dot{f} = -11 \frac{d}{dt} + \dot{x} = \frac{d}{dt}$$

1915

$$(1-u) \frac{d^2}{dz^2} + u \frac{d}{dz} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d}{dz} (1-u) \frac{d}{dz} = 0$$

而运动方程是

$$d \left( \frac{v}{f} \right) = \frac{dv}{f} - v \frac{df}{f^2} = \frac{dv}{f} - \frac{v}{f} \frac{df}{f}$$

成德以通德之說而

4.  $V = 1$  is a

14. 1. 1917

1871

$$\frac{11}{100} = \frac{11}{100} \cdot \frac{10}{10} = \frac{110}{1000}$$

... 1941 ...

$$\left(9 - \frac{1}{4\epsilon}\right) \frac{dy}{dx} = 9 \left(2 - \frac{1}{4\epsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\epsilon}}\right)$$



195 年 月 日

中国科学院  
力学研究所

因而我们可以把积分号

$$i = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{dR}{dx}} \right) \frac{dR}{dx} \quad \text{或} \quad i = \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{dR}{dx} \right)$$

在 \$y=0\$ 时, \$i=0\$。  
我们研究积分号内的函数:  
是, 也就是说

在 \$y=0\$ 时, \$i=0\$。

我们研究积分号内的函数:

是, 也就是说

$$f(x) = 0$$

在 \$y=0\$ 时, \$i=0\$。

我们研究积分号内的函数:

是, 也就是说

是, 也就是说

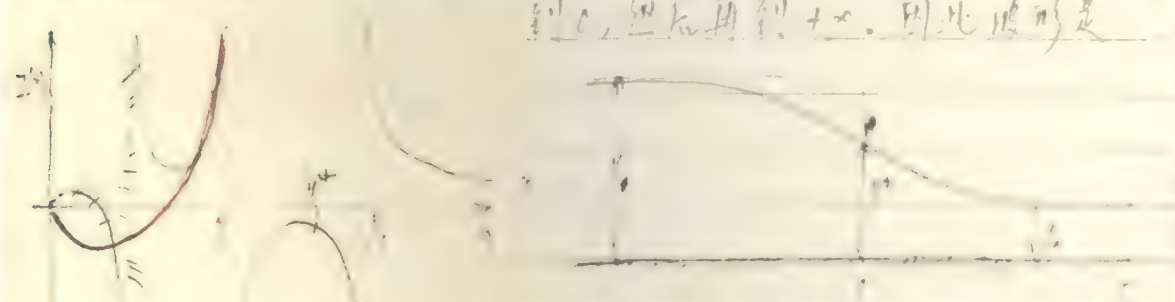
是, 也就是说

这就是说, 在 \$y=0\$ 时, \$i=0\$。一般说来, 在 \$y=0\$ 时, \$i=0\$。

如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。

如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。

如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。



如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。

如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。

如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。

$$(h + \frac{1}{2} h_0)^2 = \frac{1}{2} h_0^2 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{dh_0}{dx}} \right)^2$$

$$(h + \frac{1}{2} h_0)^2 = \frac{1}{2} h_0^2 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{dh_0}{dx}} \right)^2$$

如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。

如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。如果我们令 \$y=0\$, 我们得到 \$i=0\$。

195 年 月 日

不然的话，波上的质点不会动！

中国科学院  
力学研究所

这个方程，叫做

波速方程，它是决定波速的方程，它和波速方程是同一个方程。

$$H = \frac{1}{g} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{1}{g} \left( \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{d^2 \eta}{dy^2} + \frac{d^2 \eta}{dz^2} \right)$$

这是一个很重要的关系；因为波速很小，所以波速方程可以简化为波动方程，一般波速方程可以简化为波动方程，也就是说由于波速很小，所以波动方程可以简化为波动方程，而波速大大地减慢了，但是波动方程知道，波速是波速，一定大于波速，即波速大于流速。

### 特征线法

在矩形，特征线中的基本方程是：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + V \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + V \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = g \left[ i - \frac{1}{2} \frac{V^2}{g} \right]$$

但是  $g = 0$ ， $c$  是波速，那么

$$c \frac{\partial \eta}{\partial t} + V \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

$$2c \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial x} = g \left[ i - \frac{1}{2} \frac{V^2}{g} \right]$$

把以上两个方程相加，得到

$$2 \left\{ (c+V) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} + \left\{ (c+V) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} V = g \left[ i - \frac{1}{2} \frac{V^2}{g} \right]$$

把这两个方程相减，

$$-2 \left\{ (c+V) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} + \left\{ (c+V) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} V = g \left[ i - \frac{1}{2} \frac{V^2}{g} \right]$$

也就是说， $V=c$  时， $\frac{\partial \eta}{\partial t} - V \frac{\partial \eta}{\partial x}$  的方程是  $c$ ，而  $V=c$  时， $\frac{\partial \eta}{\partial t} + V \frac{\partial \eta}{\partial x}$  的方程是  $c$ 。所以知道，特征线法，特征线是  $V=c$ ，即特征线是  $V=c$ ，即特征线是  $V=c$ 。

195 年 月 日

中国科学院  
力学研究所

来进行逐步的数值积分。这当然是很麻烦的。但若要得到结果，我们必须注意到一般强流解，进行适当的修正。因此，在一大段内，水流的运动，其运动方程，必须作适当的修改。例如，在研究河流的流动时，必须注意问题的复杂性。这个方法特别在研究河流的流动时，应用广泛。有经验的学者，在研究河流的流动时，应用广泛。

（例如，在研究河流的流动时，应用广泛。）



195 年 月 日

中國科學院

第七讲

—

[illegible][illegible][illegible]

二

10

24

2

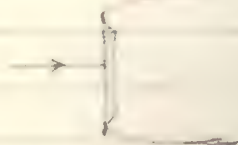






195 年 11 月

中國科學院  
力學研究所

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}_1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_3 \right)$$
[illegible]

27

7. 1 - 1

同样地， $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  是已知的，于是， $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

$$C_n(\sigma) = \frac{2\pi \sin \alpha}{1 + \pi \sin \alpha} \cdot (1 + \sigma); \quad \sigma = \frac{\pi \sin 2\alpha}{1 + \pi \sin \alpha} \cdot (1 + \sigma) \quad (1)$$

[illegible]

我们为什么要把《富春山居图》作为重点呢？这是因为  
它包含一些二值化问题，它包含许多无意义的点，如小  
黑点、小圈、研究本图形的特点、研究它的类型。  
我们下一个问题研究一下二值化及无意义点，研究它的  
问题的典型，并讨论它的办法。

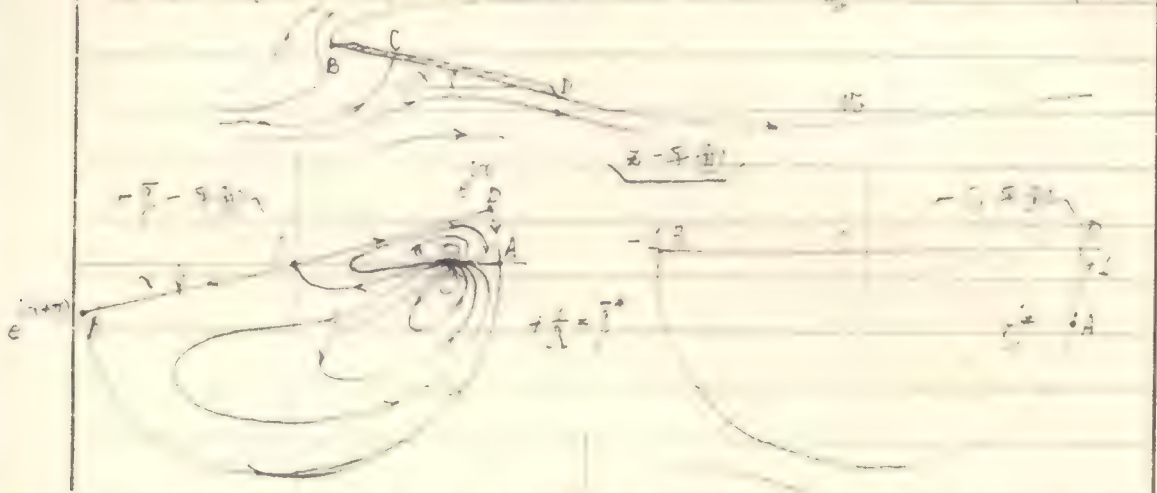
在宇宙中，一切运动都是

195 年 月 日

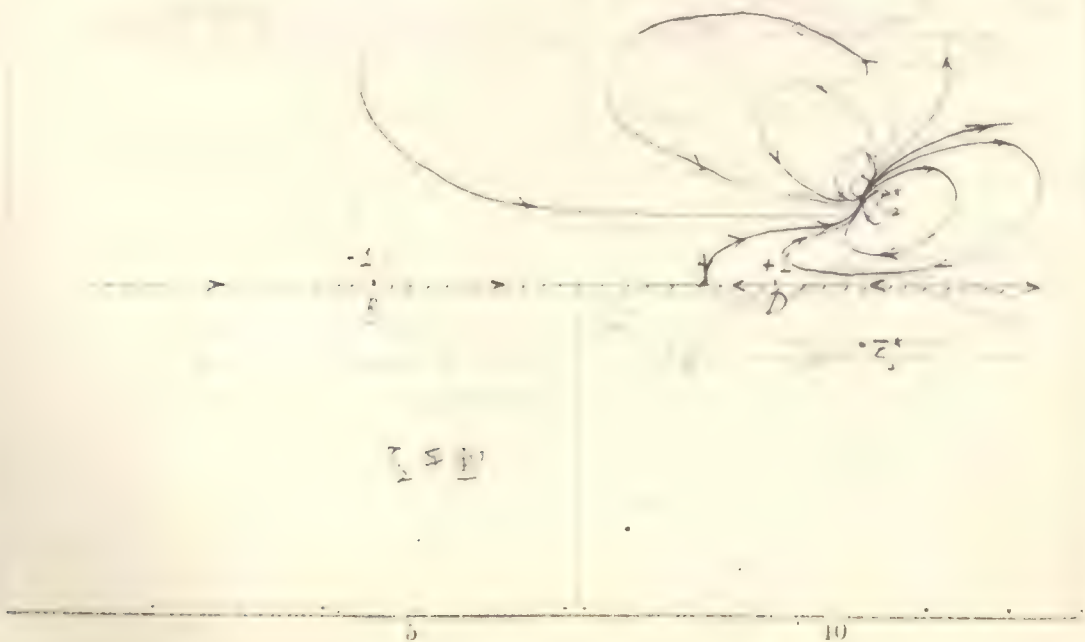
中国科学院  
力学研究所

完全真空中的平动

我们要研究的问题是一个以速度  $v$  运动的物体在真空中运动，它的背面完全真空。在运动中，它受到阻力，其阻力是速度  $v$  的平方。我们通常认为阻力  $F$  与速度  $v$  成正比，在平面及空间中，阻力与速度  $v$  成正比。我们通常认为，一定速度的物体不能在有限区



域中运动，因为同样大小，物体在真空中运动，一个物体在真空中运动，所以一般认为，这物体不受任何阻力，从而物体本身不受阻力，它是不合理的。







195 年 月 日

中國科學院  
力學研究所

有  $IV$  數, 我們求  $\frac{dV}{dz}$  以  $z = \beta$  值, 由  $\beta$  處起, 沿  $z$  軸, 則  $\frac{dV}{dz}$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dz}$$

$$= -\frac{2C}{v_0} \int \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha} - \frac{e^{i\beta} 2e^{-i\alpha} (1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz})}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha}$$

$$+ \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha} - \frac{e^{i\beta} 2e^{-i\alpha} (1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz})}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha}$$

如果升板, 高度是  $z$ , 則  $\beta = z + i\alpha$ , 則  $\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha$ , 則  $\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha$ , 則  $\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha$

所以

$$= -\frac{2C}{v_0} \int \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha} + \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha}$$

$$+ \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha} + \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha}$$

$$+ \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha} + \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha} + \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha}$$

所以

$$= -\frac{2C}{v_0} \int \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha} + \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha} + \frac{e^{i\beta}}{1 - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha}$$

我們現在求  $\beta$  值, 由  $\beta$  處起, 沿  $z$  軸, 則  $\beta = z + i\alpha$ , 則  $\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha$ , 則  $\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha$ , 則  $\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dz} + i\alpha$

將

1954. 11 11

中國科學院  
力學研究所

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1-x+x}{1-x^2} + \frac{1+x-x}{1-x^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1-x^2} \right) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\ \frac{1}{x^2-1} &= \frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ \frac{1}{x^2-1} &= \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ \frac{1}{x^2-1} &= \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)(x+1)} \\ \frac{1}{x^2-1} &= \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{D}{\frac{1}{2} \pi \omega_c^2 b} = 1 + \frac{2C}{b \omega_c} \left\{ \frac{e^{i\beta_1} - 1}{2(1 - \zeta_2^*)} \frac{1}{1 + \zeta_2^*} \right\} - e^{i\beta_1} \frac{1}{\omega_c} \int_0^{\omega_c} \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^2 - \frac{1}{4} (\zeta_2^*)^2 t^2}$$

这些情况，值得进一步的研究，这些情况，值得进一步的研究。

正迎水流

## 逆流的平反

$$b = + \frac{2C}{v_0} \left[ x' \lambda - \frac{1}{\lambda} \right] \frac{1}{(4^2 + 1)^2 + (\lambda - \frac{1}{\lambda})^2} + \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{1 + (\lambda - \frac{1}{\lambda})^2}$$

# 中國科學院力學研究所

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} - \frac{\lambda^6}{16} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} - \frac{\lambda^6}{16} + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{1}{1-\lambda^2} = \frac{1}{1-\lambda^2} = \frac{1}{1-\lambda^2}$$

由上式可得

$$\frac{P}{\frac{1}{2} \pi b} = \lambda^2 \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} - \frac{\lambda^6}{16} + \dots \right]$$

$$\frac{P}{\frac{1}{2} \pi b} = \lambda^2 \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} - \frac{\lambda^6}{16} + \dots \right]$$

$$\text{因為 } \lambda^2 = 1 + \epsilon, \text{ 所以 } \lambda = (1 + \epsilon)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{16}\epsilon^3 - \dots$$

$$\text{因此 } \tan^{-1}(\lambda) = \tan^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{16}\epsilon^3 - \dots\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{16}\epsilon^3 - \dots$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \tan^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{16}\epsilon^3 - \dots\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 - \frac{1}{16}\epsilon^3 + \dots$$

$$\frac{\lambda \tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \tan^{-1}(\frac{1}{\lambda})}{\lambda - \frac{1}{\lambda}} = \frac{\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \tan^{-1}(\frac{1}{\lambda})}{1 - \lambda^2} = \frac{\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{16}\epsilon^3 - \dots\right] - \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 - \frac{1}{16}\epsilon^3 + \dots\right]}{1 - (1 + \epsilon)}$$

$$= \frac{\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{16}\epsilon^3 - \dots\right] - \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 - \frac{1}{16}\epsilon^3 + \dots\right]}{-\epsilon} = \frac{\pi}{4\epsilon} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\epsilon + \frac{1}{16}\epsilon^2 - \dots$$

$$\frac{1}{\lambda - \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{1 - \lambda^2} = \frac{1}{1 - (1 + \epsilon)} = \frac{1}{-\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon}$$



## 中國科學院力學研究所

證明爲然或否請對下列各題

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(1+x) \cdot \frac{x}{1+x^2}}{(1+x) - \frac{x}{1+x^2}} = \frac{(1+x) \cdot \frac{x}{1+x^2}}{(1+x) - \frac{x}{1+x^2}} = \frac{(1+x) \cdot \frac{x}{1+x^2}}{(1+x) - \frac{x}{1+x^2}}$$

$$\text{也即是} \quad \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(1+x) \cdot \frac{x}{1+x^2}}{(1+x) - \frac{x}{1+x^2}} = \frac{(1+x) \cdot \frac{x}{1+x^2}}{(1+x) - \frac{x}{1+x^2}}$$

這結果說明， $\frac{f(x)}{f'(x)}$  的延拓，以對原函數， $f(x)$  的延拓， $f(x)$  是連續的， $f(x)$  是  $f(x)$  的延拓， $f(x)$  的延拓， $f(x)$  是  $f(x)$  的延拓。

如果平板不是无限长的，而是有一定长度的（比如），那么边上的

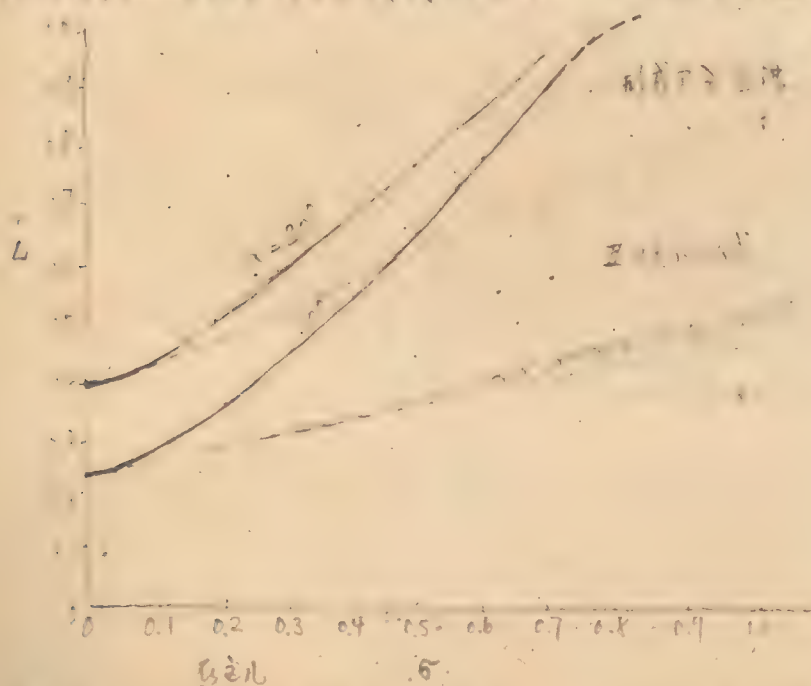
公式就不那么准确。精确的解

是可以计算得出来的，但是分

析比较复杂，而且基本方程的

求解同解<sup>以</sup>三组的一样。

所以分析不是容易的，我们只好把计算的结果在这儿表示出来（见图）

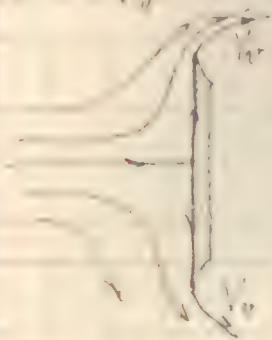


不那么大，只  
有平方定律，  
情况有所变  
化，自然用  
完全空腔的  
理论来解释  
是不加考虑的  
（见图）。

而看到四式是很不错的，而作其反小时亦然。实验结果与理论  
计算的理论计算，与图中实线符合。只不过当 $\delta$ 很大的时候，它才成为一

五、

有兩塊地，第一塊地長 120 米，寬 80 米；第二塊地長 100 米，寬 60 米。

[illegible]
$$\bar{r} = \frac{11-12}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.71 \text{ 英寸} \text{ 或 四方柱板子之厚度。即一板厚为 } 0.71 \text{ 英寸}$$


因此最易一變臨岸，而且產卵地亦極廣——系疏淺、凹凹幾何。

任思儒校：趙規律詩：「馬」上雪下姜述其詩一首功還故

$$W = - \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \right)$$

又由  $u_0 = 0$  得  $\frac{1}{2} \ln(1+x) = 0$ ,  $1+x = 1$ ,  $x = 0$ . 所以  $u_0 = 0$  的解为  $x = 0$ .

即其是流成入  $\epsilon^H$ , 而  $\epsilon^H$  是  $\epsilon^H$ ,  $\epsilon^H$  是  $\epsilon^H$ 。 17

$$W = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{2}) + i\lambda} + \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{2}) + i\lambda} + \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{2}) + i\lambda} + \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{2}) + i\lambda} \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left( -\frac{1}{(1+\frac{\lambda}{2}) + i\lambda} + \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{2}) + i\lambda} \right)$$

证明单位元是唯一的。证明也类似证明结合律。



由 (11) 知  $\frac{dW}{dz} = u - iv = V_0 \bar{z}$ , 从而  $dz = \frac{1}{V_0} \frac{dW}{d\bar{z}}$

因此 
$$dz = \frac{C}{V_0} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{\lambda^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\bar{z}^2}{\lambda^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{\lambda^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\bar{z}^2}{\lambda^2}}} \right) d\bar{z}$$

$$= \frac{4C}{V_0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{\lambda^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\bar{z}^2}{\lambda^2}}} d\bar{z}$$

如果我们用  $t$  来代替平面的虚数, 那么平面的虚数  $z = x + iy$  变为  $t = x + i\lambda y$

$$it = \frac{4C}{V_0} \frac{1}{\lambda^2} \left[ \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{idt}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} + \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{idt}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} \right] = \frac{4C}{V_0} \frac{1}{\lambda^2} \left[ \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{idt}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} + \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{idt}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} \right]$$

$$it = \frac{4C}{V_0} \frac{1}{\lambda^2} \left[ \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dt}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} + \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dt}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} \right]$$

但是

$$\lambda^2 \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dt}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1+\lambda^2-t^2}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{1-\frac{t^2}{\lambda^2}} dt = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \tan^{-1} \left( \frac{t}{\lambda} \right) \right]$$

因此 
$$\frac{\partial V_{ex}}{\partial C} = \frac{1}{\lambda^2} + \lambda \tan^{-1} \left( \frac{t}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda^2} - \lambda \tan^{-1} \left( \frac{t}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda^2} + \lambda \tan^{-1} \left( \frac{t}{\lambda} \right) - \lambda \tan^{-1} \left( \frac{t}{\lambda} \right)$$

所以用  $t$  来代替平面的虚数  $z$  时,  $t = \lambda y$  变为  $t = \lambda y$

但是  $t = \lambda y$  只是说明平面的虚数  $z$  变为  $t$

所以  $t = \lambda y$ , 说明平面的虚数  $z$  变为  $t$



五

## 第八章 非恒定流动问题

基本方程是，我们知道，如果从液体的粘性力等不计，那么即使液体依照运动发生的某种情况，从静止变为运动的，那么还有一个速度势  $\phi(x, y, z, t)$ ，它满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0$$

而且由它还可以求得速度  $u, v, w$  为

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

从这些方程式我们也可以求出计算压力的公式：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} g z = \text{常数}$$

其中  $g$  为液体的重度， $z$  为液体的深度。如果液体是由静止而起，且重力为常数时，那么由欧拉方程，可以

$$V = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

所以计算压力的公式就成为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} g z = \text{常数}$$

此许多具体问题中，例如，对圆筒的绕流，或是在圆筒内流动的



前边, 中轴边界条件只是说扰动不能无穷大, 在物理上是有意义的, 也就是说中轴边界扰动不能无限大, 即  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$  (这是表面波问题的解), 那么轴心处加上这样的条件, 说时, 第一个字是“轴心”的问题, 在一般情形下, 在轴心是不适用的。液体中的大多数轴心问题是属于这一类的。

### 自由面问题

如果液体的运动由一个自由面, 那么液体就处在自由面的下方, 而上方是大气。那么由于大气的密度远远小于液体的密度, 大气的压力可以认为是不变的, 那么在自由面上的压力也应该是变化的。也就是说, 在自由面上,  $p = \text{const}$ 。这样一来, 自由面上的边界条件是

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 = -g \eta$$

显然, 这样一个关系是非线性的, 这也就是在流体力学中, 非线性问题之所以是非线性问题的原因。我们在前边问题中, 还知道边界 (也就是自由面) 在什么地方也不知道。

我们在以前的讲稿中, 也谈到自由面的问题, 我们在那时

们都引入了一些简化的论据，把问题的复杂性降低了。例如，当表面波的波幅很小的时候，那么它的速度以及加速度也都会很小，从而速度的平方就成为二阶小量，因此可以不计，这么一来这个问题也就线性化了。

但是如果表面波的波幅不太小，~~就是问题~~ ~~不是~~ 所谓有限波幅表面波问题，那么我们就不能再用微扰法，而应该把这个问题当作非线性问题。也就是说世界方程成为

$$\text{自由面: } \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0 \quad \text{在 } z=0 \text{ 处}$$

问题也不难再进一步简化了。如果波幅是三维的，那么我们的非线性问题同样用微扰法，把三维波幅化成三维波。

如果问题真是二维的，那么世界方程自然就更进一步简化了。

$$\text{自由面: } \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0 \quad \text{在 } z=0 \text{ 处}$$

而它的方程也是二维的，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0$$

$$\text{在固定面: } \text{世界方程: } \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

[illegible]

# 中国书画函授大学肇庆分校

# 是名云作史經計國語典

此乃成，以國為重

一、二、三、四、五、六、七、八、九、十

也低亦在焉，其說亦同也。

西風也亦能吹雲兮以

便而侵入臨城區，供以臨時離開機會；但一旦離開在即，實感

是之謂也，此說亦以所結時為重，此則又思前一種子之

2. 水流的运动引起河道的冲刷, 造成河道的淤积。

河因为此等食物是非必需品，因此这一方就不容易得到。

1. 股票 (Stock) 是一种有价证券，代表对公司的所有权。股票的价格受多种因素影响，如公司业绩、市场供求等。

[illegible]

律的問題也已有完全解決，所以按三、四、五、六、七、八、九、十、十一、十二、十三、十四、十五、十六、十七、十八、十九、二十、二十一、二十二、二十三、二十四、二十五、二十六、二十七、二十八、二十九、三十、三十一、三十二、三十三、三十四、三十五、三十六、三十七、三十八、三十九、四十、四十一、四十二、四十三、四十四、四十五、四十六、四十七、四十八、四十九、五十、五十一、五十二、五十三、五十四、五十五、五十六、五十七、五十八、五十九、六十、六十一、六十二、六十三、六十四、六十五、六十六、六十七、六十八、六十九、七十、七十一、七十二、七十三、七十四、七十五、七十六、七十七、七十八、七十九、八十、八十一、八十二、八十三、八十四、八十五、八十六、八十七、八十八、八十九、九十、九十一、九十二、九十三、九十四、九十五、九十六、九十七、九十八、九十九、一百。



为了避免事先不知道自由面所取的范围，我们不妨设用  $w = h_0 \phi$  为自变量，也就是用  $\phi$  为横坐标，用  $w$  为纵坐标，我们设  $\frac{dw}{d\phi} = 1 + i \ln \phi$  为未知量， $\phi$  为速度变量  $\phi$  与  $r$  对应的函数， $\phi$  是速度的绝对值。我们知道如果  $z = r + i\theta$ ， $\frac{dz}{dz} = 1 - i\theta$  而  $w = i \ln (1 - i\theta)$ ，所以从复变函数的理论，我们知  $w$  也是  $\phi$  的函数；因此我们的流场是单值的。

由于我们设  $w$  为自变量，自由面就只好认为是  $w$  平面的实轴轴，即  $w$  轴；而流场是在  $w$  轴的上半面。这样一来，在  $w$  轴上的边界条件可写成

$$\frac{dw}{d\phi} + 1 = \text{常数}$$

如果我们把上式对自由面的流函数  $\psi = \text{常数}$ ，那么

$$e^{2\psi} \frac{dw}{d\phi} + 1 = \text{常数}$$

但是  $\frac{dw}{d\phi} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\phi}$ ，而  $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\phi} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\phi} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\phi}$

因此自由面的边界条件可以写成

当  $\psi = 0$ ， $\frac{dw}{d\phi} (e^{2\psi}) = -1$ ，在  $w$  轴上。

如果我们研究以  $c$  速度沿  $x$  轴方向传播的波, 又由于质点的振动深度是  $z$ , 那么当  $v = c$  在

$$I = r, \quad T = \ln C$$

上边的图是封面加上

如果膜是周期性的, 那么  $\beta$  和  $\gamma$  对应的周期性流形构成一个完整的内禀几何, 如果膜不是周期性的, 另一半流形的膜, 可

以看成  $\beta \rightarrow -\beta$  或  $\gamma \rightarrow -\gamma$  的时候,  $\beta = 1=0$  和  $\gamma = \infty$ ; 这

样我们就得到了完整的内禀几何。

因此, 它是不可少的, 所以因道重, 故得此, 我们知

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$$

這折向點距定三是不也，四折正使月日延是(四四四)定  
下系？

1891

10

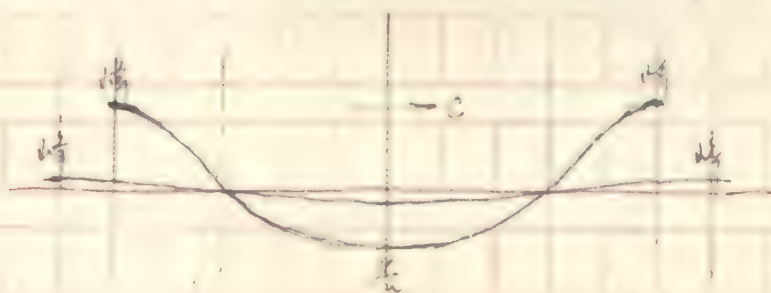
7. 2. 1960

由上题可知  $b_1 = 3$ , 即  $\frac{1}{2} \ln 3$ .  $\therefore \ln(1/n)$  的极限为 0,  
 从而  $\frac{dP}{dt} = 1 - P = e^{-t}, P(0) = 1$ .

$$dz = e^{i\omega} dW, \text{ 或 } z = \int e^{i\omega} dW$$

这样我们就求出相应的  $x, y$  坐标, 问题的解也就完整了。在物理上, 有限波幅的解就是用这个方法。

有限波幅 是等流的计算比较复杂, 我们不在这里多讲。我们只提示: 在同样的波速的条件下, 有限波幅的波长比等流波的波长要短; 而且有限波幅的波高比波谷要高, 波峰更陡。波幅越大这种情况就越明显, 最后波峰成为尖形。



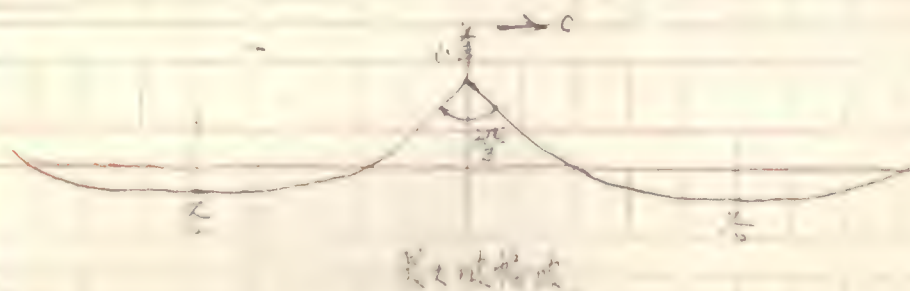
我们也可以用波峰顶角的大小: 我们把坐标移到峰顶上, 在峰顶时  $W = C z^{\frac{2}{x-1}}$ , 其中  $C$  及  $x$  是正实数。那么  $\frac{dW}{dz} = C x z^{\frac{x-2}{x-1}}$ ,

$\frac{dz}{dW} = \frac{1}{C x} z^{\frac{x-1}{x-2}}$ , 但是峰顶仍然是尖的, 在峰顶时的曲线也就是直线, 所以  $\frac{dz}{dW} \propto z^{x-1}$ ,  $\frac{d^2z}{dW^2} \propto z^{x-2}$ ; 但是依照边界条件  $\frac{d^2z}{dW^2}$  应当和  $z$  成比例, 所以  $2(x-1)=1$ ,  $x=\frac{3}{2}$ 。这说实在  $z = \left(\frac{dW}{d\eta}\right)^2$ ,  $\ln z = \ln \left(\frac{dW}{d\eta}\right)^2$ 。我们以后讲的士面



我们好点的方面，所以，在走的时候，也，应该知道是有一个峰  
 的，这个峰是  
 一个峰，这就是最大地形的起伏角了。

我们不用出来，直接地来讨论这个问题，用，上面所讨论的定  
 律是没有什么用的，它要地固定了自由面，使得所有的边界条件  
 简化了，但是而固定面上，因为1、2和3的关系，不能直接得  
 到，所以，我们用得到的是在固定面时的流场，所以，  
 以我们的目的也是要去用它来，所以，

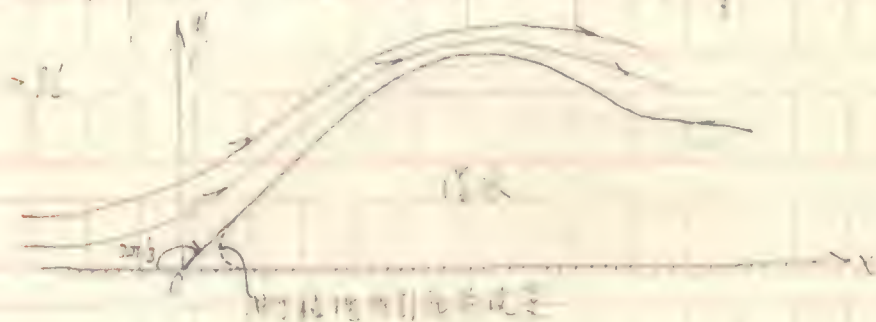


### 异重流

当是带重流的时候，水流又水质的时候，一般流迹很小，不是以引起  
 快速的运动，而是一面以带流的水的比重要比清水大些，因此，  
 水下得到的是，而水上清水在上，清层分明，形成二层，我们  
 叫这种情况为异重流。我们研究异重流<sup>问题</sup>，一个重要的问题是清水

在流体的主界面的位置问题。在研究这个问题的时候，我们应当注意的  
界面附近也即界面，也就是我们估计在界面附近流体速度在  
连续的情况下，我们从整个流体的速度场出发，认为在界面附近流体  
的速度，首先应当是界面两侧流体的不连续。自然，两侧的应力必  
高相等，而在定常流动情况下，两侧的流速必需平行于界面。

现在让我们讨论一个具体的流动问题，即水流或盐水流入淡水  
或淡水的问题。我们让淡水流速为  $u_0$ ，界面为  $x = x_0$ ，  
并且假设问题为二维的。为了简化计算，我们选择一个随  
着淡水流速运动的坐标，使得问题变为定常的，如图。



我们把淡水认为是完全静止的，而盐水在  $x_0$  处有一个驻点，在那  
里的速度为零。如果淡水流速是  $u_0$ ，那么盐水在  $x_0$  处的速度是  
 $u_1$ ，且  $u_1 > u_0$ ，分析可知，在界面处有

$$\frac{1}{2} \rho_1 u_1^2 + \frac{p}{\rho_1} = \frac{p_0}{\rho_1}$$

1950

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{A} \quad \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

从以上的公式我们又看到边界条件是巴拿赫型是必要的。我们这  
个定理与以前所讲过最大正则性定理完全类似。所以，我们可  
用同样的推论得到0点的性质。当然，它只是说在边界上的  
存在定理，自然会觉得它不如前边有些不同，因为这里只是取  
正半轴。它是运动着的，因此它同前边也有区别，在以前我们只说  
“正半轴”而这里“正半轴”用在前边“正半轴”。

我們也可以輕易地找到云信，在泥土層上的構造之始，因為在  
河口的構造地帶是泥，所以泥土層係不厚。

$$L_1 = \frac{M^2}{2 \cdot (1 - \frac{1}{2})}$$

例一：若  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ，从图中可以看出，我们也知道当清水流速也是单向增加的，如：  
流水的形成的“浪花”，所以也达到了最大值，所以：清流的形成是出现流世界的最大值。所以：从上面的图也可以看出，我们



问题

看这个图，看这个图，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \ln x$$

这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

$x=1$

这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \ln x$$

这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

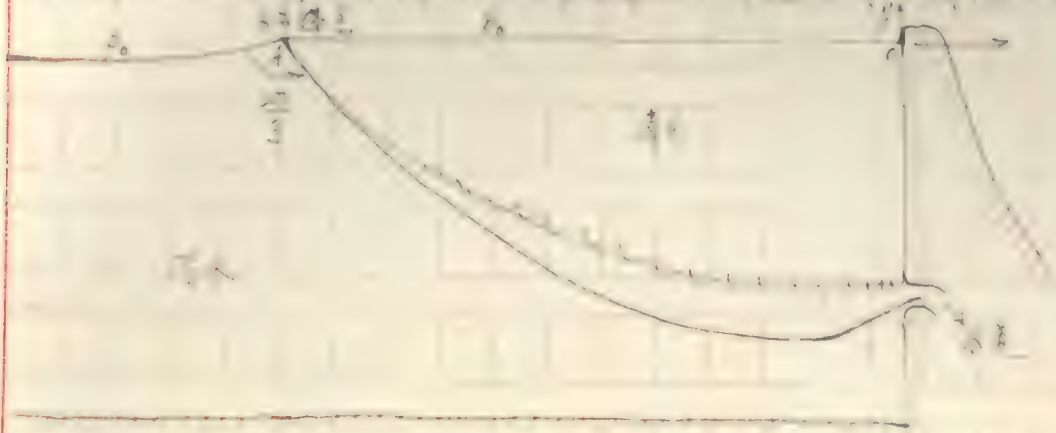
这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布，这个图是最大速度的分布。

水库的泥沙淤积问题

当河流泥沙淤积入水库的时候，一到出口口水的时候，一

四、五、六、七、八、九、十、十一、十二、十三、十四、十五、十六、十七、十八、十九、二十、二十一、二十二、二十三、二十四、二十五、二十六、二十七、二十八、二十九、三十、三十一、三十二、三十三、三十四、三十五、三十六、三十七、三十八、三十九、四十、四十一、四十二、四十三、四十四、四十五、四十六、四十七、四十八、四十九、五十、五十一、五十二、五十三、五十四、五十五、五十六、五十七、五十八、五十九、六十、六十一、六十二、六十三、六十四、六十五、六十六、六十七、六十八、六十九、七十、七十一、七十二、七十三、七十四、七十五、七十六、七十七、七十八、七十九、八十、八十一、八十二、八十三、八十四、八十五、八十六、八十七、八十八、八十九、九十、九十一、九十二、九十三、九十四、九十五、九十六、九十七、九十八、九十九、一百。



我们首先应认识到，国家主席王光美同志在报告中指出：不要忘记党的历史，不要忘记党的传统。那么，在革命斗争中，我们应如何继承和发扬党的传统呢？

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{0}{2}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{0}{2}$$

[illegible]

[illegible]

在交際中，已方所求與己方三燈，即：己、即、己。

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad - \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Q. 2. Y.

已知在平面内，点A(1, 0)，B(2, 0)，C(3, 0)，D(4, 0)，E(5, 0)，F(6, 0)，G(7, 0)，H(8, 0)，I(9, 0)，J(10, 0)，K(11, 0)，L(12, 0)，M(13, 0)，N(14, 0)，O(15, 0)，P(16, 0)，Q(17, 0)，R(18, 0)，S(19, 0)，T(20, 0)，U(21, 0)，V(22, 0)，W(23, 0)，X(24, 0)，Y(25, 0)，Z(26, 0)，AA(27, 0)，AB(28, 0)，AC(29, 0)，AD(30, 0)，AE(31, 0)，AF(32, 0)，AG(33, 0)，AH(34, 0)，AI(35, 0)，AJ(36, 0)，AK(37, 0)，AL(38, 0)，AM(39, 0)，AN(40, 0)，AO(41, 0)，AP(42, 0)，AQ(43, 0)，AR(44, 0)，AS(45, 0)，AT(46, 0)，AU(47, 0)，AV(48, 0)，AW(49, 0)，AX(50, 0)，AY(51, 0)，AZ(52, 0)，BA(53, 0)，BB(54, 0)，BC(55, 0)，BD(56, 0)，BE(57, 0)，BF(58, 0)，BG(59, 0)，BH(60, 0)，BI(61, 0)，BJ(62, 0)，BK(63, 0)，BL(64, 0)，BM(65, 0)，BN(66, 0)，BO(67, 0)，BP(68, 0)，BQ(69, 0)，BR(70, 0)，BS(71, 0)，BT(72, 0)，BU(73, 0)，BV(74, 0)，BW(75, 0)，BX(76, 0)，BY(77, 0)，BZ(78, 0)，CA(79, 0)，CB(80, 0)，CC(81, 0)，CD(82, 0)，CE(83, 0)，CF(84, 0)，CG(85, 0)，CH(86, 0)，CI(87, 0)，CJ(88, 0)，CK(89, 0)，CL(90, 0)，CM(91, 0)，CN(92, 0)，CO(93, 0)，CP(94, 0)，CQ(95, 0)，CR(96, 0)，CS(97, 0)，CT(98, 0)，CU(99, 0)，CV(100, 0)，CW(101, 0)，CX(102, 0)，CY(103, 0)，CZ(104, 0)，DA(105, 0)，DB(106, 0)，DC(107, 0)，DD(108, 0)，DE(109, 0)，DF(110, 0)，DG(111, 0)，DH(112, 0)，DI(113, 0)，DJ(114, 0)，DK(115, 0)，DL(116, 0)，DM(117, 0)，DN(118, 0)，DO(119, 0)，DP(120, 0)，DQ(121, 0)，DR(122, 0)，DS(123, 0)，DT(124, 0)，DU(125, 0)，DV(126, 0)，DW(127, 0)，DX(128, 0)，DY(129, 0)，DZ(130, 0)，EA(131, 0)，EB(132, 0)，EC(133, 0)，ED(134, 0)，EE(135, 0)，EF(136, 0)，EG(137, 0)，EH(138, 0)，EI(139, 0)，EJ(140, 0)，EK(141, 0)，EL(142, 0)，EM(143, 0)，EN(144, 0)，EO(145, 0)，EP(146, 0)，EQ(147, 0)，ER(148, 0)，ES(149, 0)，ET(150, 0)，EU(151, 0)，EV(152, 0)，EW(153, 0)，EX(154, 0)，EY(155, 0)，EZ(156, 0)，FA(157, 0)，FB(158, 0)，FC(159, 0)，FD(160, 0)，FE(161, 0)，FF(162, 0)，FG(163, 0)，FH(164, 0)，FI(165, 0)，FJ(166, 0)，FK(167, 0)，FL(168, 0)，FM(169, 0)，FN(170, 0)，FO(171, 0)，FP(172, 0)，FQ(173, 0)，FR(174, 0)，FS(175, 0)，FT(176, 0)，FU(177, 0)，FV(178, 0)，FW(179, 0)，FX(180, 0)，FY(181, 0)，FZ(182, 0)，GA(183, 0)，GB(184, 0)，GC(185, 0)，GD(186, 0)，GE(187, 0)，GF(188, 0)，GG(189, 0)，GH(190, 0)，GI(191, 0)，GJ(192, 0)，GK(193, 0)，GL(194, 0)，GM(195, 0)，GN(196, 0)，GO(197, 0)，GP(198, 0)，GQ(199, 0)，GR(200, 0)，GS(201, 0)，GT(202, 0)，GU(203, 0)，GV(204, 0)，GW(205, 0)，GX(206, 0)，GY(207, 0)，GZ(208, 0)，HA(209, 0)，HB(210, 0)，HC(211, 0)，HD(212, 0)，HE(213, 0)，HF(214, 0)，HG(215, 0)，HH(216, 0)，HI(217, 0)，HJ(218, 0)，HK(219, 0)，HL(220, 0)，HM(221, 0)，HN(222, 0)，HO(223, 0)，HP(224, 0)，HQ(225, 0)，HR(226, 0)，HS(227, 0)，HT(228, 0)，HU(229, 0)，HV(230, 0)，HW(231, 0)，HX(232, 0)，HY(233, 0)，HZ(234, 0)，IA(235, 0)，IB(236, 0)，IC(237, 0)，ID(238, 0)，IE(239, 0)，IF(240, 0)，IG(241, 0)，IH(242, 0)，II(243, 0)，IJ(244, 0)，IK(245, 0)，IL(246, 0)，IM(247, 0)，IN(248, 0)，IO(249, 0)，IP(250, 0)，IQ(251, 0)，IR(252, 0)，IS(253, 0)，IT(254, 0)，IU(255, 0)，IV(256, 0)，IW(257, 0)，IX(258, 0)，IY(259, 0)，IZ(260, 0)，JA(261, 0)，JB(262, 0)，JC(263, 0)，JD(264, 0)，JE(265, 0)，JF(266, 0)，JG(267, 0)，JH(268, 0)，JI(269, 0)，JJ(270, 0)，JJ(271, 0)，JJ(272, 0)，JJ(273, 0)，JJ(274, 0)，JJ(275, 0)，JJ(276, 0)，JJ(277, 0)，JJ(278, 0)，JJ(279, 0)，JJ(280, 0)，JJ(281, 0)，JJ(282, 0)，JJ(283, 0)，JJ(284, 0)，JJ(285, 0)，JJ(286, 0)，JJ(287, 0)，JJ(288, 0)，JJ(289, 0)，JJ(290, 0)，JJ(291, 0)，JJ(292, 0)，JJ(293, 0)，JJ(294, 0)，JJ(295, 0)，JJ(296, 0)，JJ(297, 0)，JJ(298, 0)，JJ(299, 0)，JJ(300, 0)，JJ(301, 0)，JJ(302, 0)，JJ(303, 0)，JJ(304, 0)，JJ(305, 0)，JJ(306, 0)，JJ(307, 0)，JJ(308, 0)，JJ(309, 0)，JJ(310, 0)，JJ(311, 0)，JJ(312, 0)，JJ(313, 0)，JJ(314, 0)，JJ(315, 0)，JJ(316, 0)，JJ(317, 0)，JJ(318, 0)，JJ(319, 0)，JJ(320, 0)，JJ(321, 0)，JJ(322, 0)，JJ(323, 0)，JJ(324, 0)，JJ(325, 0)，JJ(326, 0)，JJ(327, 0)，JJ(328, 0)，JJ(329, 0)，JJ(330, 0)，JJ(331, 0)，JJ(332, 0)，JJ(333, 0)，JJ(334, 0)，JJ(335, 0)，JJ(336, 0)，JJ(337, 0)，JJ(338, 0)，JJ(339, 0)，JJ(340, 0)，JJ(341, 0)，JJ(342, 0)，JJ(343, 0)，JJ(344, 0)，JJ(345, 0)，JJ(346, 0)，JJ(347, 0)，JJ(348, 0)，JJ(349, 0)，JJ(350, 0)，JJ(351, 0)，JJ(352, 0)，JJ(353, 0)，JJ(354, 0)，JJ(355, 0)，JJ(356, 0)，JJ(357, 0)，JJ(358, 0)，JJ(359, 0)，JJ(360, 0)，JJ(361, 0)，JJ(362, 0)，JJ(363, 0)，JJ(364, 0)，JJ(365, 0)，JJ(366, 0)，JJ(367, 0)，JJ(368, 0)，JJ(369, 0)，JJ(370, 0)，JJ(371, 0)，JJ(372, 0)，JJ(373, 0)，JJ(374, 0)，JJ(375, 0)，JJ(376, 0)，JJ(377, 0)，JJ(378, 0)，JJ(379, 0)，JJ(380, 0)，JJ(381, 0)，JJ(382, 0)，JJ(383, 0)，JJ(384, 0)，JJ(385, 0)，JJ(386, 0)，JJ(387, 0)，JJ(388, 0)，JJ(389, 0)，JJ(390, 0)，JJ(391, 0)，JJ(392, 0)，JJ(393, 0)，JJ(394, 0)，JJ(395, 0)，JJ(396, 0)，JJ(397, 0)，JJ(398, 0)，JJ(399, 0)，JJ(400, 0)，JJ(401, 0)，JJ(402, 0)，JJ(403, 0)，JJ(404, 0)，JJ(405, 0)，JJ(406, 0)，JJ(407, 0)，JJ(408, 0)，JJ(409, 0)，JJ(410, 0)，JJ(411, 0)，JJ(412, 0)，JJ(413, 0)，JJ(414, 0)，JJ(415, 0)，JJ(416, 0)，JJ(417, 0)，JJ(418, 0)，JJ(419, 0)，JJ(420, 0)，JJ(421, 0)，JJ(422, 0)，JJ(423, 0)，JJ(424, 0)，JJ(425, 0)，JJ(426, 0)，JJ(427, 0)，JJ(428, 0)，JJ(429, 0)，JJ(430, 0)，JJ(431, 0)，JJ(432, 0)，JJ(433, 0)，JJ(434, 0)，JJ(435, 0)，JJ(436, 0)，JJ(437, 0)，JJ(438, 0)，JJ(439, 0)，JJ(440, 0)，JJ(441, 0)，JJ(442, 0)，JJ(443, 0)，JJ(444, 0)，JJ(445, 0)，JJ(446, 0)，JJ(447, 0)，JJ(448, 0)，JJ(449, 0)，JJ(450, 0)，JJ(451, 0)，JJ(452, 0)，JJ(453, 0)，JJ(454, 0)，JJ(455, 0)，JJ(456, 0)，JJ(457, 0)，JJ(458, 0)，JJ(459, 0)，JJ(460, 0)，JJ(461, 0)，JJ(462, 0)，JJ(463, 0)，JJ(464,





一、由自由面方程及交界面方程，得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0$$

若从这方程求得自由面方程及交界面方程，我们还可得  
面方程及交界面方程。现在我们来考虑这个问题。对于自由面  
方程，它是一个二阶的方程（当然它也到了边界，边界有一定大小  
它不会是一个点），但在这方程中我们的未知数是未知的，  
因此，如果我们设自由面方程为二阶的，那末它就变成了一个  
问题，即一个二阶的方程，它是一个二阶的方程，它的自由面是

$$u = \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi$$

在交界面处，由交界面方程，得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi$$

如果我们假设，那末交界面方程就是一个二阶的方程，而



交界面方程，它是一个二阶的方程，它是一个二阶的方程，它是一个二阶的方程。我们可得，  
如果交界面方程是一个二阶的方程，那末交界面方程就是一个二阶的方程，它是一个二阶的方程。

在力学中,  $r$  是半径。

在运动中

在力学中,  $r$  是半径, 在运动中,  $r$  是半径。

在力学中,  $r$  是半径, 在运动中,  $r$  是半径。

$$r^3 - 2r^2 + \frac{r^2}{2r} = 1$$

在力学中,  $r$  是半径, 在运动中,  $r$  是半径。

$$(r-r_1)(r-r_2)=0, \quad (r^2-2r_1r+r_1^2)(r-r_2)=0$$

$$r^3 - (2r_1+r_2)r^2 + (r_1^2+2r_1r_2)r - r_1^2r_2 = 0$$

在力学中,  $r$  是半径, 在运动中,  $r$  是半径。

$$r_1^3 = \frac{r^2}{\pi^2} \frac{r_1}{r_1^2 r}$$

$$\frac{2}{r_1} = 1$$

$$\frac{2}{r_1} = 1$$

在力学中,  $r$  是半径, 在运动中,  $r$  是半径。

$$\frac{r_1^3}{r_1^2} = \frac{r^2}{\pi^2} \frac{r_1}{r_1^2 r} = \frac{2r}{\pi^2} = 1.242$$

我们说, 如果  $r$  是半径, 那么  $r$  是半径, 如果  $r$  是半径, 那么  $r$  是半径。

如果  $d > d^*$ , 则水不涌出船外; 如果  $d < d^*$ , 则水涌出船外。从以上和船口的尺寸, 我们是能够求出  $d^*$  的, 有了  $d^*$  就能求出  $d^*$ 。如果我们多量而得  $d^*$ , 从实验上求出的  $d^*$  值, 那么  $d < d^*$ , 则水涌出船外是不行的, 但是计算得太低了, 当不溢出的时候又常常有误差的误差, 因此; 这使得  $d^*$  的意义更大了。

实验结果大体上符合理论的结果, 只是误差有些

(1-1)

$$\frac{\rho d^*}{\rho_2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = 0.344$$

我们考虑到上面理论计算的结果, 计算上有一个近似的误差(即), 理论和实验的对比是可以满意的。





[illegible]

我们收集一下就有二十个经验公式，~~然~~我们用它们的时候，就一定要  
（附每一公式简短的实验说明，或用多数的统计等，~~不然就~~使用的  
不恰当，因而得不到可靠的结论。——

是沙浓度的分布

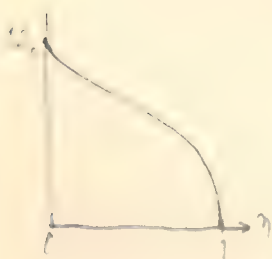
在平衡状态下

大品經

我們黨在革命鬥爭中，始終是站在最前線的。我們黨的領導機關，也是根據這個原則來工作的。我們黨的領導機關，也是根據這個原則來工作的。





$$\frac{d^2 y}{dy^2} = \frac{1}{y^2} \quad \text{for } y \neq 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2 y}{dy^2} = 0 \quad \text{for } y = 0$$
$$\frac{d_x(x)}{W} = \frac{1}{W} \frac{d}{dx} (x^2) = \frac{2x}{W}$$
$$d(\ln \Delta S) = \frac{\beta}{r} \frac{-d\eta}{((1+\frac{\beta}{r})/(1-\eta))} = \beta \frac{-d\eta}{(r+\eta)/(1-\eta)} = -\beta \left[ \frac{1}{1-\eta} + \frac{1}{r+\eta} \right] \frac{d\eta}{1+r}$$
$$\ln \frac{S_1}{S_0} = \ln \left( \frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}} \right)^{\frac{2}{1+r}}$$
$$\Delta S = \Delta S_0 \left( \frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}} \right)^{\frac{8}{4+r}} \quad 0 < \eta < 1$$


$\gamma = k_s$  是粗糙度和水深的比,它一般是很小的,因此我们可以把上面的公式写作

$$\Delta S = \Delta S_0 \left( \frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{\beta}$$

而这个故事，则是用实验方法才得出来的，它是从经验中得来的，所以是科学的。我们对于科学的认识，是随着实验的进步而进步的。所以这个故事，所以这个理论是科学的。

[illegible]



这个物理问题，主要是要说明泥沙在重力作用下，在河床上的运动，以及泥沙的淤积和冲刷。这个问题的物理模型，是一个流体运动问题，涉及到流体力学、泥沙运动力学、以及泥沙的淤积和冲刷等问题。在解决这个问题时，需要用到流体力学、泥沙运动力学、以及泥沙的淤积和冲刷等方面的知识。

(可参看“树案”=无渠道中泥沙的输移和床底的变化，力学学报，2卷2期)

### 浅水、缓流情况下的沙底波长

在浅水、缓流情况下，泥沙的运动主要受到重力、水流的作用。泥沙的运动可以分为泥沙的淤积和冲刷。泥沙的淤积是指泥沙在河床上的沉积，而泥沙的冲刷是指泥沙在河床上的侵蚀。泥沙的运动与河床的形态密切相关。在浅水、缓流情况下，泥沙的运动主要受到重力、水流的作用。泥沙的运动可以分为泥沙的淤积和冲刷。泥沙的淤积是指泥沙在河床上的沉积，而泥沙的冲刷是指泥沙在河床上的侵蚀。泥沙的运动与河床的形态密切相关。

$$y = -h + A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

假设泥沙的运动是周期性的，那么泥沙的运动可以用正弦函数来表示。假设泥沙的运动是周期性的，那么泥沙的运动可以用正弦函数来表示。假设泥沙的运动是周期性的，那么泥沙的运动可以用正弦函数来表示。假设泥沙的运动是周期性的，那么泥沙的运动可以用正弦函数来表示。

$$\phi = Ux + C \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sinh \frac{2\pi y}{\lambda} + D \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cosh \frac{2\pi y}{\lambda}$$

因此

$$v_x = U + \frac{2\pi}{\lambda} [-C \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sinh \frac{2\pi y}{\lambda} + D \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cosh \frac{2\pi y}{\lambda}]$$

$$v_y = \frac{2\pi}{\lambda} [C \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cosh \frac{2\pi y}{\lambda} + D \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sinh \frac{2\pi y}{\lambda}]$$

$$v_x = U + \frac{2\pi}{\lambda} [C \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cosh \frac{2\pi y}{\lambda} + D \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sinh \frac{2\pi y}{\lambda}]$$

在浅水、缓流情况下，泥沙的运动主要受到重力、水流的作用。泥沙的运动可以分为泥沙的淤积和冲刷。泥沙的淤积是指泥沙在河床上的沉积，而泥沙的冲刷是指泥沙在河床上的侵蚀。泥沙的运动与河床的形态密切相关。

$$U + \frac{2\pi}{\lambda} [C \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cosh \frac{2\pi y}{\lambda} + D \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sinh \frac{2\pi y}{\lambda}]$$



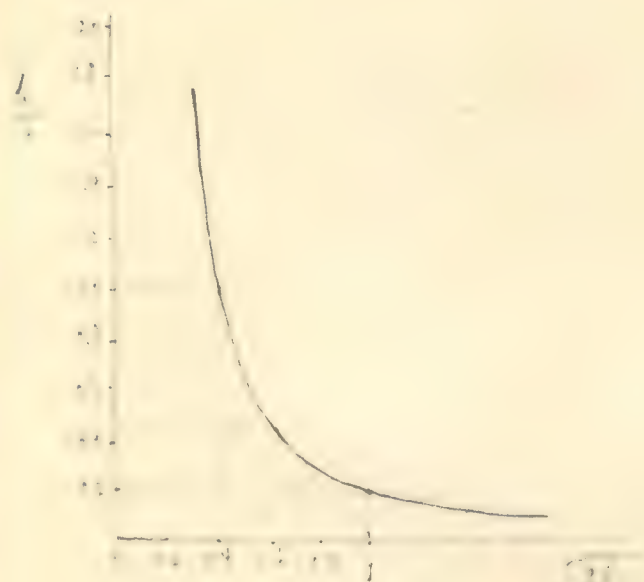


在已讨论过下，

$$q = \frac{1}{2} \rho g H^3 \left( 1 - \frac{H_0}{H} \right) = \frac{1}{2} \rho g H^3 \left( 1 - \frac{H_0}{H} \right) = \frac{1}{2} \rho g H^3 \left( 1 - \frac{H_0}{H} \right)$$

也许是说  $H > H_0$ ，表面泥沙的冲刷深度大，这些泥沙到底有没有冲刷呢？  
 当然，什么，万能的不变。

当然，我们的分析是一个线型的理论，因此它也有很大的局限性，  
 绝对值。所以我们的计算只解决了问题的一半！



## 注释与说明

这份讲义手稿是1958年下半年钱学森老师在清华大学给第一届力学研究班学员讲授《水动力学》课程用的备课笔记。1956年制订我国12年科学规划时，钱学森、钱伟长、郭永怀、张维等老师深感我国力学人才的匮乏，难以适应大规模经济和科学技术发展的需要。为此，在科学规划中列入了紧急开办力学研究班的措施：决定自1957年春起，抽调各高校的优秀应届毕业生、教师和研究所的技术人员共120余人参加学习，采用研究生班的规模化培养方式，学制二年。二年中，钱学森、钱伟长、郭永怀、林同骥、李敏华、郑哲敏、王仁、杜庆华等都亲自执教或指导论文，一时名师荟萃，群英毕至，盛况空前。他们为学员带来当时国际力学学科领域的最新成就与理念，使受业者眼界大开，学业猛进，受益终身，犹如在朦胧的迷途中，敞开了-一片新的天地。这个班的学员们毕业后洒向全国，经过几十年的锤炼，造就成为一代力学学科的后续播种者；清华大学力学研究班先后办了三期，它在我国力学学科发展史上的重大作用，得到业界公认，其功绩理应首归钱学森老师等的一代宗师。

本份手稿的写就，距今已有半个世纪。随着科技发展的突飞猛进，它不仅没有失去光彩，反而更加显示出它的醇厚芬芳，遒劲有力。首先，钱老师选材简赅精切，遴选的内容具有基础性、经典性，至今仍使人感到熠熠生辉；在阐述和推演过程中充分体现了哥廷根学派的重要理念：强调科学与技术、数学学科与应用学科紧密结合来解决工程关键问题；要求细致观察和了解物理现象，提炼出反映本质的物理模型，然后建立方程加以模化，用最有效的数学手段求出结果，从而掌握事物的基本规律。这也正是由钱老师率先提出、并为科技界广泛接受的“力学是技术科学”精神的具体演示。本手稿的另一重要特色是清晰耐读，详略得体，推演细腻，覆盖全面；这样细致而又充实的备课笔记所体现的负责、求实、善诱、淳导的精神，足为后人示范。

作为本手稿注释者的我们两人，当年是第一-届力学研究班的学员兼辅导教师。遗憾的是钱老师授课时，我们两人因有他务而未能亲临听讲。这些年来凭借阅读杨文熊学长的听课笔记而受益。这次有幸得以详尽拜读手稿，收获和感触良多。我们认为给本手稿作导读性的注释是多余的。因此本注释的内容仅为手稿中文字上的笔误，以及在个别段落处为便于读者理解的少量提示。此外，还依藉杨文熊学长当年认真而又详尽的听课笔记，将钱老师在课堂上讲课时所提供的某些重要补充作为注释。这些注释都未经钱老师本人审阅，不当和错误全系我们两人之责。

刘应中、何友声



## 第一讲 表面波

(1) 第4页,倒3行:“让为”是“认为”之笔误。

(2) 第5页,第3行中的常数 $\zeta$ 与14行的自由面形状 $\zeta$ ,不要混淆。

(3) 第6页,第8行:“所以质点轨迹”,应该是“所以流线方程是”,因为用的是流线方程。一般说来,对不定常问题,流线不和轨迹重合。但对当前的问题,流线方程不随时间而变,所以实际上,轨迹是与流线重合的。

(4) 第6页,倒1行:“流线是可以在 $z$ -向移动的”后加注:“因为移动给人的印象是随时间变动位置,而这里流线不随时间变化,故为流线向 $z$ -向延伸的意思。”

(5) 第8页,倒5行:“园”为“圆”之笔误。

(6) 第9页,1行:“园”为“圆”之笔误。

## 第二讲 表面波(续)

(7) 第13页第4行末尾“很容易”之后加一注:这里是选定在以波速 $c$ 移动的动坐标系中讨论的,这时运动变成定常的了。

(8) 第13页,第11行“……增加!”后加注:“波长与水深之比很大者称为长波,反之称为短波。例如浅水时, $h \rightarrow 0$ ,对应于长波;当水深很大或有限水深时,对应于短波。”

(9) 第14页中间红字部分:“我们看到如果要表面张力与引力占同等重要的地位,那么”之后可以加注:

$$\alpha \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \sim \alpha \frac{\zeta}{\lambda^2}, \text{ 则有 } \frac{\alpha}{\lambda^2} \sim \rho_2 g, \text{ 从而 } \lambda \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_2 g}}.$$

(10) 在14页中间:“我们知道

$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ ”后可以加注:因为下层水有一个平行于 $x$ 轴的速度 $u$ ,于是,对二维问

题,自由面上一点 $x, z = \zeta(x, t)$ 的速度为

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

因为此前给出的关系(见第3页)中没有流速。

(11) 14 页倒 5 行:“ $a\sigma = -C_1 k$ ”处加注:这是因为上层空气本来是不动的,所以

$$\left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \text{从而有 } a\sigma = -C_1 k.$$

(12) 15 页第 9 行:“的最小值。也就是”处可加注:将上式看作波长的函数,即

$$F(\lambda) = \frac{g\lambda}{2\pi} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right) + \frac{2\pi\alpha}{\lambda(\rho_2 + \rho_1)}$$

按极值条件  $F'(\lambda) = 0$ , 可得这个关系。

### 第三讲 波阻

(13) 17 页第 3 行:“令波的周期为  $\lambda$ ”处加注:这里指波长,波浪在空间重复的周期。

(14) 17 页倒 12 行:“坚”为“竖”之笔误。

(15) 17 页倒 9 行:“ $\zeta$  的波高……”,注:这里指波面形状,而不是波高。

(16) 20 页第 8 行:

$$g\delta(x) = c \frac{\partial(x, 0)}{\partial x} \text{ 系 } g\delta(x) = c \frac{\partial\varphi(x, 0)}{\partial x} \text{ 之笔误。}$$

(17) 21 页中多处出现的

$$f(z) = i \frac{d^2 w}{dz^2} - \nu \frac{dw}{dz}$$

和 20 页倒 5 行定义的

$$i \frac{dw}{dz} - \nu w = f(z) = \varphi' + i\psi'$$

不是一个函数,请勿混淆。

(18) 21 页第 9 行:在“可根据 Schwartz 对称原理”这里加一注:参看斯米尔诺夫《高等数学》(叶彦谦译),商务印书馆,1953 年,第三卷、第二分册,第 94 页“对称原理”。

(19) 21 页第 15 行:“二级极点”为“二阶极点”之笔误。

(20) 24 页第 2 行:“依照 Чаплыгин 公式”处可加注:参看柯钦、基柏尔、罗斯《理论流体力学》,卷一,第六章,第五节。

(21) 25 页第 2 行末尾可加注:左边是个复数积分,根据积分线路的变换知道,该积分应该从极点  $ih$  的右边绕过。等式右端第一项就是绕过极点  $ih$  的半个留数,这样右端第二个积分中

虽然在形式上含有极点  $ih$ , 但应该是取积分主值的。于是第 6 行引入的两个特殊函数就是实数, 而且不含奇点了(第二个特殊函数只含有可去奇点)。第二行右端第一和第二个积分的积分限所以取为  $3ih$ , 是为了使第 4 行最后一个积分的上下限的绝对值成为相同的。

(22) 在 25 页末尾可注: 钱老师在课堂上曾补充指出, 这里解是可以叠加的, 但是得到的流体动力却不能叠加, 因 Чаплыгин 公式中含有  $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$ , 是非线性的。例如, 两个涡的速度势可以叠加, 但是作用在两个涡上的力, 却要考虑两个涡的相互影响。

#### 第四讲 水面滑行的平板

(23) 在 26 页第一行标题之后加注: 钱老师在课堂上补充指出: 板在水面上靠滑行得到升力, 与一般船舶靠浮力支撑者不同。为此先考虑作用在自由面上一点的力  $F$  所产生的解。

(24) 28 页第 9 行的末尾可加一注: 积分可以分解成以下右端的形式:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\nu x \xi} d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{\nu x \xi}) d\xi}{\xi^2 + 1}$$

是因为在  $\nu$  小时, 可以证明, 后面的积分的首项是  $O(\nu)$  的量阶, 从而在后面(倒 7、8 行)的展开中未写出的首项是  $O(\nu^2)$  的量阶。

(25) 28 页倒 4 行, “平板上的压力分布是  $p - p_0 = f(\xi)$ ,  $0 < \xi < b$ ” 后参照笔记可加注: 钱老师在课堂上补充指出: 这里  $b$  是板长。平板在水面上滑行, 平板处的水面斜率  $\alpha$  是给定的, 因为自由面形状必定符合平板, 而压力分布是待求的, 因此, 求压力分布  $f(\xi)$ , 必定归结为求解积分方程的问题了。

(26) 32 页第 5 行: “……引力……” 为 “……引入……” 之笔误。

(27) 32 页第 10 行: “可以……” 为 “可是……” 之笔误。

#### 第五讲 浅水中的长波

(28) 35 页倒 7 行末可按笔记加注: 钱先生在课堂上补充指出: 在无旋条件中以  $v_z = 0$  代入可得  $\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$ , 而无旋条件剩下:  $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ 。

(29) 35 页, 倒 5 行: “三面……” 为 “上面……” 之笔误。

(30) 36 页第 4 行中密度两字可加上引号“密度”。



(31) 37 页第 1 行和第 2 行:“深水”,在这里是指“浅水”。

(32) 37 页第 4 行:“ $v^2 > g(h+c)$ ”为“ $v^2 > g(h+\zeta)$ ”之笔误。

(33) 37 页第 15 行:“水槽起始的一头有一个在宽度变化上形似 Laval 喷口的槽,从而得到超临界速度流。在此以后槽宽就不改了”之后加注:水力学上实现超临界速度流的办法,一般是在深度方向改变槽底深度,例如将水流经过一个水坝后可以得到超临界流。

(34) 37 页倒 4 行,“浅因”为“浅固”之笔误。

(35) 38 页第 7 行:“ $-\bar{g}$ ”为“ $-1$ ”之笔误。

(36) 42 页,倒 2 行和倒 4 行中,一些打叉的项只是一些检查的记号,并不是消去的意思。

(37) 43 页,倒 3 行和倒 6 行:“ $\rho_1/\rho_0$ ”为“ $\bar{\rho}_1/\bar{\rho}_0$ ”之笔误。

## 第六讲 河流水动力学

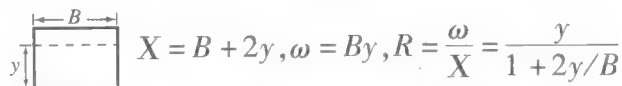
(38) 44 页第 5 行中“ $ds$ ”及第 8 行中“ $-\frac{\partial Q}{\partial s}dx\Delta t$ ”,以后都将“ $ds$ ”改成“ $dx$ ”及“ $\partial s$ ”改成“ $\partial x$ ”了。

(39) 44 页第 6 行,“断面”,指的是“断面面积”。

(40) 46 页第 7 行,钱老师在课堂上对“ $qpV$ ”项作如下解释: $q$  本身没有速度, $qpVdx$  为动量之变化。

(41) 46 页,倒 10 行:“犹”为“尤”之笔误。

(42) 47 页,倒 6 行,钱老师在讲课时补充了下图:



$$X = B + 2y, \omega = By, R = \frac{\omega}{X} = \frac{y}{1 + 2y/B}$$

(43) 48 页第 3 行之末可加注:钱老师在讲课时补充指出:故一般  $g - D^2/y^3 \neq 0$ , 而且

$$g - D^2/y^3 > 0。$$

(44) 49 页第 3 行在“ $\cdots C/\varepsilon$  的形式”后面加注:由于 49 页原第一行的式子被划掉,导致前后语句不顺,可改动如下:“因为,  $B > 0, i > 0$ , 所以我们可设在  $y = y^*$  附近, 48 页第 5 行的等式右边的积分核(讲义中成为积分子)具有  $C/\varepsilon$  的形式,  $C$  为一个正的常数。

(45) 49 页第 3 ~ 4 行中关于  $\varepsilon$  为正或负趋近于  $y^*$ ,  $x$  都趋于  $-\infty$ , 与所示图不符。

(46) 50 页第 10 行,“以  $u$  速度向  $x$  - 向进行的波”后可加注: $u$  是常数。

(47) 51 页末尾可加一注:被积函数  $I(\eta)$  有两个零点:  $\eta = 0$  和  $\eta = \sqrt[3]{D^2/Gg}$ , 在  $\eta = 0$  附近被积函数  $I \sim \gamma \frac{D^2}{D|D|} \eta^{1/3}$ ,  $D$  和  $I$  都是负的。在  $\eta = 0$  和  $\eta = \sqrt[3]{D^2/g}$  之间, 水流是超临界的; 大于

$\eta = \sqrt[3]{D^2/g}$ , 水流是亚临界的。被积函数  $I$  有两个奇点  $y_0$  和  $y_1$ , 设  $y_1 > y_0$ 。它们分别由上面(倒 1、2 行)两个公式决定。在  $y_0$  和  $y_1$  点, 有  $\frac{dy}{d\zeta} = 0$ , 即水深不变。

## 第七讲 空 化

(48) 54 页, 倒 4 行: “犹”为“尤”之笔误。

(49) 55 页倒 2 行, “空蚀”为“空化”之笔误。

(50) 56 页, 倒 10 行: “的移”为“而移”之笔误。

(51) 57 页第 3 行: “用”为“同”之笔误。

(52) 59 页第 3 行: “园”为“圆”之笔误。

(53) 59 页第 7 行: “因为  $q = \frac{1}{\lambda}, \lambda \geq 1$ ”, 这里  $q$  应该是  $q^*$ , 代表奇点在  $q$ -平面的位置。

对照 58 页  $q$ -平面的图可知。

(54) 60 页倒 4 行末尾, 钱老师在课堂上有如下补充: 对于给定的板的宽度  $b$ , 来流的攻角  $\alpha$ , 速度和压力, 以及蒸汽压, 可以由此式计算常数  $C$ , 即为偶强。

(55) 60 页最后一行, 钱老师在课堂上有如下补充:

“ $P = \frac{1}{2}\rho v_v^2 \int_{-1}^1 (1 - q\bar{q}) dz = \frac{1}{2}\rho v_v^2 b [1 - \frac{1}{b} \int_{-1}^1 t^2 dz]$ , 将第 4 行  $dz$  的表达式代入, 得到”

(56) 64 页, 倒 2 行: “犹”为“尤”之笔误。

(57) 在 65 页前加注: “钱老师在手稿中还提供了另一种推演正迎水的平板的解的方法如下:” 在 67 页倒 2 行之末加注: “这一结果与 62 页 7 行的结果完全相同”。

(58) 65 页, 倒 5 行: “园”为“圆”之笔误。

## 第八讲 非线性自由面及交界面问题

(59) 69 页第 9 行: “任”为“认”之笔误。

(60) 71 页第 11 行: “可以”为“可是”之笔误。

(61) 72 页第 3 行: “ $\omega = \theta + i \ln q$ ”之后加注: “ $\omega = \theta + i \tau$  所以  $\tau = \ln q$ , 或  $e^\tau = q$ ”。

(62) 78 页第 2 行: “图”为“示”之笔误。

(63) 78 页末行末尾漏掉“面”字。

(64) 81 页第 5 行:“口的”为“口是”之笔误。

(65) 81 页第 9 行:“假设孔口宽度大,高度  $r$  小, $q$  为每一单位宽度的流量,流速  $v$  的近似值是  $v = \frac{q}{\pi r}$ ”后面加注:“此式有待进一步查实”

(66) 由于时间安排关系,第八讲内容钱老师在力学研究班讲课时将它跃过了。

## 第九讲 泥沙问题

(67) 84 页第八讲为讲课时的第八讲,实际应为第九讲。

(68) 85 页,倒 9 行:“方式”为“公式”之笔误。

(69) 86 页,第 4 行:“ $\tau = \tau_0(1 - \eta)$ ”后加注:“钱老师在课堂上补充如下:设一小块重  $\rho gh(1 - \eta) \cdot 1 \cdot 1 \cdot i = \tau$ ,可见  $\tau \propto (1 - \eta)$ ,故可写成此式”。

(70) 86 页最后一行末尾可加注:在深度方向的浓度梯度是  $\frac{d\Delta S}{dy}$ ,经过湍流扩散,泥沙的体积流量是  $\varepsilon \frac{d\Delta S}{dy}$ ,扩散的方向是从高浓度指向低浓度,故前面应该有一符号。这里是湍流的质量扩散系数,一般取为湍流的动量扩散系数,也就是湍流的粘性系数,或称湍流的传输系数。

(71) 87 页第 3 行:“用”是“同”的笔误。

(72) 89 页倒 1 行末尾加注:“钱老师在课堂上补充:在河底  $y = -h$  上,流速顺着沙滩的表面,有:

$$\frac{dy}{dx} = A \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{v_y}{v_x} \approx \frac{v_y}{u}。”$$

(73) 90 页第 3 行末尾加注:钱老师在课堂上纠正了一个符号,即

$$v_x = U + \frac{2\pi}{\lambda} \left[ D \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right] \text{ 改为 } v_x = U - \frac{2\pi}{\lambda} \left[ D \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right]$$

下同。

(74) 90 页 5 行末尾可加注:水面驻波波形为

$$y = B \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$



[ General Information ]

书名= 水动力学讲义手稿

作者= 钱学森著

页数= 98

SS 号= 11978230

出版日期= 2007.1

前言

目录

第一讲 表面波

基本方程式

平面波

在深水中驻波

进行波

第二讲 表面波（续）另一研究行波的方法

群速度

在有限深度液体中的波

在空气与水交界面上的波

风力生波的问题

第三讲 波阻

波的能量

能量的转移

波阻

在自由面下的旋

第四讲 水面滑行的平板作用在自由面上的力 $F$

以仰角 $\alpha$  运行的平板

船舶造波阻力的计算

第五讲 浅水中的长波基本方程式

写成气动力学形式

高速气流的水流模型

特征线解法

	水跃
第六讲 的流动	河流水动力学河道和明渠中 定常流、合流问题 洪峰、不定常流 特征线法
第七讲	空化 空泡、空蚀现象 局部的空蚀 完全的空泡情况 完全空泡中的平板（任意攻角） 正迎水流的平板 正迎水的平板（另一推演）
第八讲	非线性自由面及交界面问题
基本方程式	自由面问题 一种转换 异重流 水库的异重流问题
第九讲	泥沙问题 渠道中泥沙的输移 悬沙浓度的分布 浅水情况下的沙涟波长
注释与说明	